Matematika (PITUP)

Prof.dr.sc. Blaženka Divjak

FOI, Varaždin

Dio IV

Matrice i determinante

"Ekspert je netko tko poznaje najgore greške koje se mogu napraviti u njegovom području i zna kako ih treba izbjeći" `Werner Heisenberg`

Sadržaj

- Matrice i determinante
  - Uvod
  - Definicija matrice
  - Specijalne matrice
  - Operacije s matricama
  - Determinante
  - Svojstva determinanti
  - Minore i kofaktori
  - Laplaceov razvoj determinante
  - Inverzna matrica
  - Matrične jednadžbe

Uvod

Matrice su jedan od najvažnijih matematičkih objekata koje imaju široku primjenu u raznim područjima ljudske djelatnosti, a pogotovo u informatici.

Matrice se koriste:

- za zapisivanje i obradu podataka
- za različita modeliranja u ekonomici
- u kompjutorskoj grafici

Definicija matrice

Neka su $M = \{1, 2, \dots, m\}$ i $N = \{1, 2, \dots, n\}$.

Realna matrica A **tipa (formata)** (m, n) je funkcija

$$A : M \times N \to \mathbb{R}$$

pri čemu se funkcijska vrijednost $A(i, j)$ označava s a_{ij} i smješta u i-ti redak i j-ti stupac tablice s m redova i n stupaca.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Neka su $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ i $N = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Kompleksna matrica A **tipa (formata)** (m, n) je funkcija

$$A : M \times N \to \mathbb{C}$$

pri čemu se funkcijska vrijednost $A(i, j)$ označava s a_{ij} i smješta u i-ti redak i j-ti stupac tablice s m redova i n stupaca.

Skup svih realnih matrica tipa (m, n) označavamo s $M_{mn}(\mathbb{R})$, a skup svih kompleksnih matrica tipa (m, n) označavamo s $M_{mn}(\mathbb{C})$.

Ponekad se kratko skup svih matrica tipa (m, n) označava s M_{mn} pri čemu je iz konteksta jasno da li se radi o realnim ili kompleksnim matricama ili pak nam je svejedno. Naime, uglavnom ćemo se baviti realnim matricama, ali sve definicije i operacije koje ćemo imati na realnim matricama, analogno se prenose i na kompleksne matrice, tim više što je

$$M_{mn}(\mathbb{R}) \subset M_{mn}(\mathbb{C}).$$

Za element a_{ij} matrice A koristi se i oznaka $[A]_{ij}$. S druge strane, za matricu čiji su elementi a_{ij} koristi se i oznaka $[a_{ij}]$.

Primjer 1.

Napišite matricu A *tipa* $(2,3)$ *ako je* $a_{ij} = |i-j| + |i+j|$.

Primjer 1.

Napišite matricu A tipa $(2,3)$ ako je $a_{ij} = |i-j| + |i+j|$.

Rješenje.

$$a_{11} = |1-1| + |1+1| = 2$$

$$a_{12} = |1-2| + |1+2| = 4$$

$$a_{13} = |1-3| + |1+3| = 6$$

$$a_{21} = |2-1| + |2+1| = 4$$

$$a_{22} = |2-2| + |2+2| = 4$$

$$a_{23} = |2-3| + |2+3| = 6$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Jednakost matrica

Za matrice $A = [a_{ij}]$ tipa (m, n) i $B = [b_{ij}]$ tipa (p, q) kažemo da su **jednake** i pišemo $A = B$ ako vrijedi

a $m = p, \quad n = q$

b $a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i, j$

Jednostavnije rečeno, dvije matrice su jednake ako su istog tipa i ako su im odgovarajući elementi jednaki.

Primjer 2.

Da li su matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ *i* $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ *jednake?*

Primjer 2.

Da li su matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ *i* $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ *jednake?*

Rješenje.

Matrica A je tipa $(2,3)$, a matrica B je tipa $(3,2)$ pa one nisu jednake jer nisu istog tipa.

Primjer 3.

Odredite vrijednosti realnih parametara a i b tako da matrice A i B budu jednake, ako je

$$A = \begin{bmatrix} a^2 - b^2 & (a+b)^2 \\ (a-b)^2 & a^2 + b^2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -9 & 1 \\ 81 & 41 \end{bmatrix}.$$

Primjer 3.

Odredite vrijednosti realnih parametara a i b tako da matrice A i B budu jednake, ako je

$$A = \begin{bmatrix} a^2 - b^2 & (a+b)^2 \\ (a-b)^2 & a^2 + b^2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -9 & 1 \\ 81 & 41 \end{bmatrix}.$$

Rješenje.

Matrice A i B su tipa $(2,2)$ pa da bi bile jednake moraju im odgovarajući elementi biti jednaki.

$$a^2 - b^2 = -9$$

$$(a+b)^2 = 1$$

$$(a-b)^2 = 81$$

$$a^2 + b^2 = 41$$

Iz prve i četvrte jednadžbe dobivamo da je $a^2 = 16$ i $b^2 = 25$, odnosno $a = \pm 4$ i $b = \pm 5$.

Iz druge i treće jednadžbe slijedi da mora biti

$$a + b = \pm 1, \qquad a - b = \pm 9.$$

To je moguće jedino u dva slučaja:

a $a = -4$, $b = 5$

b $a = 4$, $b = -5$

Specijalne matrice

Kvadratna matrica reda n je matrica tipa (n, n). Dakle, to je matrica koja ima jednak broj redaka i stupaca.

Primjer kvadratne matrice reda 3:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Neka je $A = [a_{ij}]$ kvadratna matrica reda n.

Glavna dijagonala matrice A je uređena n-torka

$$(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}).$$

Sporedna dijagonala matrice A je uređena n-torka

$$(a_{1n}, a_{2\,n-1}, \ldots, a_{n1}).$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 & -2 \\ -8 & 5 & 1 & 0 \\ 17 & 1 & -3 & 2 \\ 9 & 8 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 & -2 \\ -8 & 5 & 1 & 0 \\ 17 & 1 & -3 & 2 \\ 9 & 8 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

Neka je $A = [a_{ij}]$ kvadratna matrica reda n.

Glavna dijagonala matrice A je uređena n-torka

$$(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}).$$

Sporedna dijagonala matrice A je uređena n-torka

$$(a_{1n}, a_{2\,n-1}, \ldots, a_{n1}).$$

Glavna dijagonala

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 & -2 \\ -8 & 5 & 1 & 0 \\ 17 & 1 & -3 & 2 \\ 9 & 8 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 & -2 \\ -8 & 5 & 1 & 0 \\ 17 & 1 & -3 & 2 \\ 9 & 8 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

Neka je $A = [a_{ij}]$ kvadratna matrica reda n.

Glavna dijagonala matrice A je uređena n-torka

$$(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}).$$

Sporedna dijagonala matrice A je uređena n-torka

$$(a_{1n}, a_{2\,n-1}, \ldots, a_{n1}).$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 & -2 \\ -8 & 5 & 1 & 0 \\ 17 & 1 & -3 & 2 \\ 9 & 8 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

Sporedna dijagonala

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 & -2 \\ -8 & 5 & 1 & 0 \\ 17 & 1 & -3 & 2 \\ 9 & 8 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

Dijagonalna matrica je kvadratna matrica čiji su elementi izvan glavne dijagonale jednaki 0, tj.

$$a_{ij} = 0 \text{ za } i \neq j.$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Jednostavniji zapis dijagonalnih matrica:

$$A = \operatorname{diag}(2, -3, 8), \quad B = \operatorname{diag}(3, 0, 5, -2)$$

Gornje trokutasta matrica je kvadratna matrica kojoj su elementi ispod glavne dijagonale jednaki 0, tj.

$$a_{ij} = 0 \;\; \text{za} \;\; i > j.$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Donje trokutasta matrica je kvadratna matrica kojoj su elementi iznad glavne dijagonale jednaki 0, tj.

$$a_{ij} = 0 \text{ za } i < j.$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 1 & -8 & 9 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 9 & 0 \\ 3 & 0 & -9 & 1 \end{bmatrix}$$

Jedinična matrica je dijagonalna matrica kojoj su elementi na glavnoj dijagonali jednaki 1, tj.

$$a_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad \leftarrow \quad \text{Kroneckerov simbol}$$

Jedinične matrice trećeg i četvrtog reda:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Standardna oznaka za jediničnu matricu je I bez obzira na red koji će iz konteksta biti jasan.

Jednoredna matrica je matrica tipa $(1, n)$, tj. to je matrica koja ima samo jedan redak.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

Jednostupčana matrica je matrica tipa $(m, 1)$, tj. to je matrica koja ima samo jedan stupac.

$$A = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Nulmatrica je matrica čiji su svi elementi jednaki 0, tj.

$$a_{ij} = 0, \quad \forall i, j.$$

Nulmatrice tipa $(2, 3)$ i $(2, 2)$:

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Standardna oznaka za nulmatricu je O bez obzira kojeg je tipa koji će iz konteksta biti jasan.

Za kvadratnu matricu $A = [a_{ij}]$ kažemo da je **simetrična** ako vrijedi

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \forall i, j.$$

Drugim riječima, takva matrica je simetrična s obzirom na svoju glavnu dijagonalu.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & 8 & -1 \\ -3 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & -1 & 10 & 6 \end{bmatrix}$$

Za kvadratnu matricu $A = [a_{ij}]$ kažemo da je **antisimetrična** ako vrijedi

$$a_{ij} = -a_{ji}, \quad \forall i, j.$$

U slučaju da je $i = j$ dobivamo da je $a_{ii} = -a_{ii}$, odnosno $a_{ii} = 0$ za svaki i. Dakle, antisimetrične matrice na glavnoj dijagonali imaju nule.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 8 & -1 \\ 3 & -8 & 0 & -10 \\ -2 & 1 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

Operacije s matricama

Transponiranje matrica

Transponirana matrica matrice A tipa (m, n) je matrica A^T tipa (n, m) za koju vrijedi

$$\left[A^T\right]_{ij} = [A]_{ji}.$$

Transponirana matrica zadane matrice dobije se tako da se svi njezini redovi napišu u stupce.

Transponiranje matrica je **unarna operacija** na matricama.

$$\left(A^T\right)^T = A$$

Primjer 4.

Transponirajte matricu $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 \\ \pi & -9 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$.

Primjer 4.

Transponirajte matricu $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 \\ \pi & -9 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$.

Rješenje.

Matrica A je tipa $(3, 4)$. Transponirana matrica A^T će biti tipa $(4, 3)$.

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & \pi & -2 \\ -3 & -9 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Zbrajanje matrica

Zbrajati se mogu samo matrice istog tipa i kao rezultat opet dobijemo matricu istog tipa kojeg su bile i početne matrice. Preciznije, neka su $A, B \in M_{mn}$ dane sa $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$. **Zbroj matrica** A i B je matrica $C = [c_{ij}] \in M_{mn}$ za koju vrijedi

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad \forall i, j.$$

Pišemo: $C = A + B$.

Dakle, dvije matrice istog tipa zbrajamo tako da im zbrojimo odgovarajuće elemente.

Primjer 5.

Odredite zbroj matrica $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}$ *i* $B = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 12 & 6 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Primjer 5.

Odredite zbroj matrica $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}$ *i* $B = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 12 & 6 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Rješenje.

$$A + B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 8 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 12 & 6 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 + (-3) & 4 + 7 \\ 2 + 12 & 3 + 6 \\ 8 + 0 & -3 + 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 11 \\ 14 & 9 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$$

Kako se zbrajanje matrica svodi na zbrajanje realnih brojeva po komponentama, vrijede sljedeća svojstva zbrajanja matrica.

Za matrice A, B i C tipa (m, n) vrijedi:

1. Komutativnost zbrajanja matrica:

$$A + B = B + A$$

2. Asocijativnost zbrajanja matrica:

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

3. Postoji **neutralni element**: nulmatrica tipa (m, n)

$$A + O = O + A = A$$

Množenje matrice skalarom (brojem)

Matricu množimo brojem tako da svaki element matrice pomnožimo tim brojem i dobivamo matricu istog tipa kojeg je bila i početna matrica.

Preciznije, neka je $A = [a_{ij}] \in M_{mn}$ i $k \in \mathbb{R}$. **Produkt matrice** A i **realnog broja** k je matrica $C = [c_{ij}] \in M_{mn}$ takva da je

$$c_{ij} = k a_{ij}, \quad \forall i, j.$$

Primjer 6.

Odredite produkt matrice $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}$ *i broja* $\frac{3}{2}$.

Primjer 6.

Odredite produkt matrice $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}$ *i broja* $\frac{3}{2}$.

Rješenje.

$$\frac{3}{2}A = \frac{3}{2}\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 8 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}\cdot(-1) & \frac{3}{2}\cdot 4 \\ \frac{3}{2}\cdot 2 & \frac{3}{2}\cdot 3 \\ \frac{3}{2}\cdot 8 & \frac{3}{2}\cdot(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 6 \\ 3 & \frac{9}{2} \\ 12 & -\frac{9}{2} \end{bmatrix}$$

Propozicija 1.

Neka su $k, l \in \mathbb{R}$, *a* $A, B \in M_{mn}$. *Tada vrijedi:*

1. *kvaziasocijativnost*

$$k(lA) = (kl)A$$

2. *posjedovanje jedinice*

$$1 \cdot A = A$$

3. *distributivnost u odnosu na zbrajanje skalara*

$$(k + l)A = kA + lA$$

4. *distributivnost u odnosu na zbrajanje matrica*

$$k(A + B) = kA + kB$$

Dokaz.

Sva nabrojena svojstva množenja matrice skalarom slijede iz svojstava množenja i zbrajanja realnih brojeva.

1 Neka je $A = [a_{ij}]$. Tada je

$$k(lA) = k\left[la_{ij}\right] = \left[k(la_{ij})\right] \underset{\downarrow}{=} \left[(kl)a_{ij}\right] = kl\left[a_{ij}\right] = (kl)A$$

asocijativnost množenja realnih brojeva

2 Neka je $A = [a_{ij}]$. Tada je

$$1 \cdot A = [1 \cdot a_{ij}] = [a_{ij}] = A$$

3 Neka je $A = [a_{ij}]$. Tada je

$$(k+l)A = (k+l)[a_{ij}] = [(k+l)a_{ij}] = [ka_{ij} + la_{ij}] =$$

distributivnost množenja prema zbrajanju realnih brojeva

$$= [ka_{ij}] + [la_{ij}] = k[a_{ij}] + l[a_{ij}] =$$

$$= kA + lA$$

4 Neka je $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$. Tada je

$$k(A+B) = k\big([a_{ij}] + [b_{ij}]\big) = k[a_{ij} + b_{ij}] =$$

$$= [k(a_{ij} + b_{ij})] = [ka_{ij} + kb_{ij}] =$$

distributivnost množenja prema zbrajanju realnih brojeva

$$= [ka_{ij}] + [kb_{ij}] = k[a_{ij}] + k[b_{ij}] = kA + kB$$

Oduzimanje matrica

$$A - B = A + (-1)B$$

Jednostavnije rečeno, dvije matrice istog tipa oduzimamo tako da im oduzmemo odgovarajuće elemente i kao rezultat dobijemo opet matricu istog tipa kojeg su bile i početne matrice.

Dakle, ako je $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$, tada je

$$A - B = [a_{ij} - b_{ij}].$$

Primijetimo da za svaku matricu $A = [a_{ij}] \in M_{mn}$ postoji tzv. **suprotna matrica** oblika $-A = [-a_{ij}]$ za koju vrijedi

$$A + (-A) = -A + A = O.$$

Množenje matrica

Množenje matrica se ne definira na način sličan zbrajanju. Za to postoje dublji razlozi u koje ovdje nećemo ulaziti, ali ćemo dati jedan primjer koji bi nam trebao opravdati tu definiciju u smislu da ona ima primjene na stvarne probleme.

Neka su $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ dvije uređene n-torke realnih brojeva. **Skalarni produkt** tih uređenih n-torki je

$$\mathbf{ab} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

Primjer 7.

Nađite skalarni produkt uređenih četvorki $(1, 3, -2, 0)$ *i* $(9, 8, -3, -7)$.

Primjer 7.

Nađite skalarni produkt uređenih četvorki $(1, 3, -2, 0)$ *i* $(9, 8, -3, -7)$.

Rješenje.

$$(1, 3, -2, 0) \cdot (9, 8, -3, -7) =$$

$$= 1 \cdot 9 + 3 \cdot 8 + (-2) \cdot (-3) + 0 \cdot (-7) = 39$$

Primjer 7.

Nađite skalarni produkt uređenih četvorki $(1,3,-2,0)$ *i* $(9,8,-3,-7)$.

Rješenje.

$$(1,3,-2,0)\cdot(9,8,-3,-7) =$$
$$= 1\cdot 9 + 3\cdot 8 + (-2)\cdot(-3) + 0\cdot(-7) = 39$$

Kažemo da je matrica A **ulančana** s matricom B ako matrica B ima onoliko redaka koliko matrica A ima stupaca, tj. ako je A tipa (m,n), a B tipa (n,p). U tom slučaju matrica B <u>ne mora biti ulančana</u> s matricom A (to će biti jedino u slučaju $p=m$). Dakle, za ulančanost je bitan poredak matrica.

$\boxed{\text{Množiti se mogu jedino ulančane matrice.}}$

Neka su dane matrice

$$A = [a_{ij}] \in M_{mn} \quad \text{i} \quad B = [b_{ij}] \in M_{np}.$$

Produkt matrica A i B je matrica $C = [c_{ij}]$ tipa (m, p) za čije elemente vrijedi

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Pišemo: $C = AB$.

Pogledamo li malo bolje, u i-tom retku i j-tom stupcu u AB se nalazi skalarni produkt i-tog retka matrice A sa j-tim stupcem matrice B.

Dakle,

$$c_{ij} = \big(i\text{-ti redak matrice A}\big) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{skalarni produkt}}}{\cdot} \big(j\text{-ti stupac matrice B}\big)$$

Dakle,

$$c_{ij} = \left(i\text{-ti redak matrice A}\right) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{skalarni produkt}}}{\cdot} \left(j\text{-ti stupac matrice B}\right)$$

Primjer 8.

Odredite AB i BA ako je

a $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

b $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

Rješenje.

a A je tipa $(3,3)$, B je tipa $(3,3) \Rightarrow AB$ je tipa $(3,3)$.

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

Konačno rješenje

Rješenje.

a A je tipa $(3,3)$, B je tipa $(3,3) \Rightarrow AB$ je tipa $(3,3)$.

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

$$c_{11} = (3,4,0) \cdot (0,-5,1) = 3 \cdot 0 + 4 \cdot (-5) + 0 \cdot 1 = -20$$

Rješenje.

a A je tipa $(3,3)$, B je tipa $(3,3) \Rightarrow AB$ je tipa $(3,3)$.

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

$$c_{11} = (3,4,0) \cdot (0,-5,1) = 3 \cdot 0 + 4 \cdot (-5) + 0 \cdot 1 = -20$$

Rješenje.

a A je tipa $(3,3)$, B je tipa $(3,3) \Rightarrow AB$ je tipa $(3,3)$.

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

$$c_{12} = (3,4,0) \cdot (1,-1,2) = 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 = -1$$

Rješenje.

a A je tipa $(3,3)$, B je tipa $(3,3) \Rightarrow AB$ je tipa $(3,3)$.

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & -1 & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

$$c_{12} = (3,4,0) \cdot (1,-1,2) = 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 = -1$$

Rješenje.

a A je tipa $(3,3)$, B je tipa $(3,3) \Rightarrow AB$ je tipa $(3,3)$.

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & -1 & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

$$c_{13} = (3,4,0) \cdot (1,2,1) = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 11$$

Rješenje.

a A je tipa $(3,3)$, B je tipa $(3,3) \Rightarrow AB$ je tipa $(3,3)$.

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & -1 & 11 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

$$c_{13} = (3,4,0) \cdot (1,2,1) = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 11$$

Rješenje.

a A je tipa $(3,3)$, B je tipa $(3,3) \Rightarrow AB$ je tipa $(3,3)$.

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & -1 & 11 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

$$c_{21} = (5,1,2) \cdot (0,-5,1) = 5 \cdot 0 + 1 \cdot (-5) + 2 \cdot 1 = -3$$

Rješenje.

a A je tipa $(3,3)$, B je tipa $(3,3) \Rightarrow AB$ je tipa $(3,3)$.

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & -1 & 11 \\ -3 & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

$$c_{21} = (5,1,2) \cdot (0,-5,1) = 5 \cdot 0 + 1 \cdot (-5) + 2 \cdot 1 = -3$$

Rješenje.

a A je tipa $(3,3)$, B je tipa $(3,3) \Rightarrow AB$ je tipa $(3,3)$.

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & -1 & 11 \\ -3 & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

$$c_{22} = (5,1,2) \cdot (1,-1,2) = 5 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 = 8$$

Rješenje.

a A je tipa $(3, 3)$, B je tipa $(3, 3) \Rightarrow AB$ je tipa $(3, 3)$.

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & -1 & 11 \\ -3 & 8 & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

$$c_{22} = (5, 1, 2) \cdot (1, -1, 2) = 5 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 = 8$$

Rješenje.

a A je tipa $(3,3)$, B je tipa $(3,3)$ $\Rightarrow$ AB je tipa $(3,3)$.

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & -1 & 11 \\ -3 & 8 & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

$$c_{23} = (5,1,2) \cdot (1,2,1) = 5 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 9$$

Rješenje.

a A je tipa $(3,3)$, B je tipa $(3,3) \Rightarrow AB$ je tipa $(3,3)$.

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & -1 & 11 \\ -3 & 8 & 9 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

$$c_{23} = (5,1,2) \cdot (1,2,1) = 5 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 9$$

Rješenje.

a A je tipa $(3,3)$, B je tipa $(3,3) \Rightarrow AB$ je tipa $(3,3)$.

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & -1 & 11 \\ -3 & 8 & 9 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

$$c_{31} = (-1,2,0)\cdot(0,-5,1) = -1\cdot 0 + 2\cdot(-5) + 0\cdot 1 = -10$$

Rješenje.

a A je tipa $(3,3)$, B je tipa $(3,3) \Rightarrow AB$ je tipa $(3,3)$.

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & -1 & 11 \\ -3 & 8 & 9 \\ -10 & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

$$c_{31} = (-1,2,0)\cdot(0,-5,1) = -1\cdot 0 + 2\cdot(-5) + 0\cdot 1 = -10$$

Rješenje.

a A je tipa $(3,3)$, B je tipa $(3,3) \Rightarrow AB$ je tipa $(3,3)$.

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & -1 & 11 \\ -3 & 8 & 9 \\ -10 & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

$$c_{32} = (-1,2,0)\cdot(1,-1,2) = -1\cdot 1 + 2\cdot(-1) + 0\cdot 2 = -3$$

Rješenje.

a A je tipa $(3,3)$, B je tipa $(3,3)$ $\Rightarrow$ AB je tipa $(3,3)$.

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & -1 & 11 \\ -3 & 8 & 9 \\ -10 & -3 & c_{33} \end{bmatrix}$$

$$c_{32} = (-1,2,0)\cdot(1,-1,2) = -1\cdot 1 + 2\cdot(-1) + 0\cdot 2 = -3$$

Rješenje.

a A je tipa $(3,3)$, B je tipa $(3,3) \Rightarrow AB$ je tipa $(3,3)$.

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & -1 & 11 \\ -3 & 8 & 9 \\ -10 & -3 & c_{33} \end{bmatrix}$$

$$c_{33} = (-1,2,0) \cdot (1,2,1) = -1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 3$$

Rješenje.

a A je tipa $(3,3)$, B je tipa $(3,3) \Rightarrow AB$ je tipa $(3,3)$.

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & -1 & 11 \\ -3 & 8 & 9 \\ -10 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$c_{33} = (-1, 2, 0) \cdot (1, 2, 1) = -1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 3$$

Rješenje.

a A je tipa $(3, 3)$, B je tipa $(3, 3)$ $\Rightarrow$ AB je tipa $(3, 3)$.

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & -1 & 11 \\ -3 & 8 & 9 \\ -10 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

Cijeli postupak množenja

Rješenje.

a B je tipa $(3,3)$, A je tipa $(3,3) \Rightarrow BA$ je tipa $(3,3)$.

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

Konačno rješenje

Rješenje.

a B je tipa $(3,3)$, A je tipa $(3,3) \Rightarrow BA$ je tipa $(3,3)$.

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

$$c_{11} = (0,1,1) \cdot (3,5,-1) = 0 \cdot 3 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot (-1) = 4$$

Rješenje.

a B je tipa $(3,3)$, A je tipa $(3,3) \Rightarrow BA$ je tipa $(3,3)$.

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

$$c_{11} = (0,1,1) \cdot (3,5,-1) = 0 \cdot 3 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot (-1) = 4$$

Rješenje.

a B je tipa $(3,3)$, A je tipa $(3,3) \Rightarrow BA$ je tipa $(3,3)$.

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

$$c_{12} = (0,1,1) \cdot (4,1,2) = 0 \cdot 4 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 3$$

Rješenje.

a B je tipa $(3,3)$, A je tipa $(3,3) \Rightarrow BA$ je tipa $(3,3)$.

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

$$c_{12} = (0,1,1) \cdot (4,1,2) = 0 \cdot 4 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 3$$

Rješenje.

a B je tipa $(3, 3)$, A je tipa $(3, 3) \Rightarrow BA$ je tipa $(3, 3)$.

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

$$c_{13} = (0, 1, 1) \cdot (0, 2, 0) = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 = 2$$

Rješenje.

a B je tipa $(3,3)$, A je tipa $(3,3) \Rightarrow BA$ je tipa $(3,3)$.

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

$$c_{13} = (0,1,1) \cdot (0,2,0) = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 = 2$$

Rješenje.

a B je tipa $(3,3)$, A je tipa $(3,3) \Rightarrow BA$ je tipa $(3,3)$.

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

$$c_{21} = (-5,-1,2)\cdot(3,5,-1) = -5\cdot 3 - 1\cdot 5 - 2\cdot 1 = -22$$

Rješenje.

a B je tipa $(3,3)$, A je tipa $(3,3) \Rightarrow BA$ je tipa $(3,3)$.

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -22 & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

$$c_{21} = (-5,-1,2) \cdot (3,5,-1) = -5 \cdot 3 - 1 \cdot 5 - 2 \cdot 1 = -22$$

Rješenje.

a B je tipa $(3,3)$, A je tipa $(3,3) \Rightarrow BA$ je tipa $(3,3)$.

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -22 & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

$$c_{22} = (-5,-1,2)\cdot(4,1,2) = -5\cdot 4 + (-1)\cdot 1 + 2\cdot 2 = -17$$

Rješenje.

a B je tipa $(3,3)$, A je tipa $(3,3) \Rightarrow BA$ je tipa $(3,3)$.

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -22 & -17 & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

$$c_{22} = (-5,-1,2)\cdot(4,1,2) = -5\cdot 4 + (-1)\cdot 1 + 2\cdot 2 = -17$$

Rješenje.

a B je tipa $(3,3)$, A je tipa $(3,3) \Rightarrow BA$ je tipa $(3,3)$.

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -22 & -17 & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

$$c_{23} = (-5,-1,2)\cdot(0,2,0) = -5\cdot 0 + (-1)\cdot 2 + 2\cdot 0 = -2$$

Rješenje.

a B je tipa $(3,3)$, A je tipa $(3,3) \Rightarrow BA$ je tipa $(3,3)$.

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -22 & -17 & -2 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

$$c_{23} = (-5,-1,2) \cdot (0,2,0) = -5 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 0 = -2$$

Rješenje.

a B je tipa $(3,3)$, A je tipa $(3,3) \Rightarrow BA$ je tipa $(3,3)$.

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -22 & -17 & -2 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

$$c_{31} = (1,2,1) \cdot (3,5,-1) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot (-1) = 12$$

Rješenje.

a B je tipa $(3, 3)$, A je tipa $(3, 3) \Rightarrow BA$ je tipa $(3, 3)$.

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -22 & -17 & -2 \\ 12 & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

$$c_{31} = (1, 2, 1) \cdot (3, 5, -1) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot (-1) = 12$$

Rješenje.

a B je tipa $(3,3)$, A je tipa $(3,3) \Rightarrow BA$ je tipa $(3,3)$.

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -22 & -17 & -2 \\ 12 & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

$$c_{32} = (1,2,1) \cdot (4,1,2) = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 8$$

Rješenje.

a B je tipa $(3,3)$, A je tipa $(3,3) \Rightarrow BA$ je tipa $(3,3)$.

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -22 & -17 & -2 \\ 12 & 8 & c_{33} \end{bmatrix}$$

$$c_{32} = (1,2,1) \cdot (4,1,2) = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 8$$

Rješenje.

a B je tipa $(3,3)$, A je tipa $(3,3)$ $\Rightarrow$ BA je tipa $(3,3)$.

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -22 & -17 & -2 \\ 12 & 8 & c_{33} \end{bmatrix}$$

$$c_{33} = (1,2,1)\cdot(0,2,0) = 1\cdot 0 + 2\cdot 2 + 1\cdot 0 = 4$$

Rješenje.

a B je tipa $(3,3)$, A je tipa $(3,3) \Rightarrow BA$ je tipa $(3,3)$.

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -22 & -17 & -2 \\ 12 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

$$c_{33} = (1,2,1) \cdot (0,2,0) = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 = 4$$

Rješenje.

a B je tipa $(3,3)$, A je tipa $(3,3) \Rightarrow BA$ je tipa $(3,3)$.

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -22 & -17 & -2 \\ 12 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

Cijeli postupak množenja

b A je tipa $(3, 2)$, B je tipa $(2, 2)$ $\Rightarrow$ AB je tipa $(3, 2)$.

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}$$

▸ Konačno rješenje

b A je tipa $(3,2)$, B je tipa $(2,2) \Rightarrow AB$ je tipa $(3,2)$.

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}$$

$$c_{11} = (0,1) \cdot (1,2) = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 2$$

b A je tipa $(3,2)$, B je tipa $(2,2) \Rightarrow AB$ je tipa $(3,2)$.

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}$$

$$c_{11} = (0,1) \cdot (1,2) = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 2$$

b A je tipa $(3,2)$, B je tipa $(2,2) \Rightarrow AB$ je tipa $(3,2)$.

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}$$

$$c_{12} = (0,1) \cdot (2,3) = 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 3$$

b A je tipa $(3,2)$, B je tipa $(2,2) \Rightarrow AB$ je tipa $(3,2)$.

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}$$

$$c_{12} = (0,1) \cdot (2,3) = 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 3$$

b A je tipa $(3, 2)$, B je tipa $(2, 2) \Rightarrow AB$ je tipa $(3, 2)$.

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}$$

$$c_{21} = (2, 1) \cdot (1, 2) = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 4$$

b A je tipa $(3,2)$, B je tipa $(2,2)$ $\Rightarrow$ AB je tipa $(3,2)$.

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}$$

$$c_{21} = (2,1) \cdot (1,2) = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 4$$

b A je tipa $(3,2)$, B je tipa $(2,2) \Rightarrow AB$ je tipa $(3,2)$.

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}$$

$$c_{22} = (2,1) \cdot (2,3) = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 7$$

b A je tipa $(3,2)$, B je tipa $(2,2)$ $\Rightarrow$ AB je tipa $(3,2)$.

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}$$

$$c_{22} = (2,1) \cdot (2,3) = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 7$$

b A je tipa $(3,2)$, B je tipa $(2,2)$ $\Rightarrow$ AB je tipa $(3,2)$.

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}$$

$$c_{31} = (2,3) \cdot (1,2) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 8$$

b A je tipa $(3, 2)$, B je tipa $(2, 2) \Rightarrow AB$ je tipa $(3, 2)$.

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \\ 8 & c_{32} \end{bmatrix}$$

$$c_{31} = (2, 3) \cdot (1, 2) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 8$$

b A je tipa $(3,2)$, B je tipa $(2,2)$ $\Rightarrow$ AB je tipa $(3,2)$.

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \\ 8 & c_{32} \end{bmatrix}$$

$$c_{32} = (2,3) \cdot (2,3) = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 13$$

b A je tipa $(3,2)$, B je tipa $(2,2)$ $\Rightarrow$ AB je tipa $(3,2)$.

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \\ 8 & 13 \end{bmatrix}$$

$$c_{32} = (2,3) \cdot (2,3) = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 13$$

b A je tipa $(3,2)$, B je tipa $(2,2) \Rightarrow AB$ je tipa $(3,2)$.

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \\ 8 & 13 \end{bmatrix}$$

Cijeli postupak množenja

b B je tipa $(2, 2)$, A je tipa $(3, 2) \Rightarrow BA$ nije definirano.

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

b B je tipa $(2, 2)$, A je tipa $(3, 2)$ $\Rightarrow$ BA nije definirano.

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$(1, 2) \cdot (0, 2, 2)$ ne možemo izračunati.

Iz prethodnog primjera uočavamo da množenje matrica nije komutativno, tj. općenito je

$$AB \neq BA.$$

Može se dogoditi da AB jest definirano, a da BA nije definirano.

Nadalje, dijeljenje matrica nije definirano.

Pogledajmo sada jedan primjer koji će nam pokazati da ovakvo "čudno" množenje matrica ima primjenu na realne probleme.

Primjer 9.

Proizvode N_1, N_2, N_3 *moguće je kupiti u trgovinama* T_1 *i* T_2 *po sljedećim cijenama:*

- *u* T_1 *po 20, 13, 10 kuna redom,*
- *u* T_2 *po 21, 12, 11 kuna redom.*

Sastavite matricu A *tipa* $(2, 3)$ *tako da sadrži dane podatke o cijenama. Koji se broj nalazi na mjestu* a_{21}*? Nadalje, želimo li kupiti*

5 komada N_1*, 3 komada* N_2*, 4 komada* N_3*,*

izračunajte koliko bi to ukupno došlo u trgovini T_1*, a koliko u trgovini* T_2*.*

Rješenje.

$$A = \begin{array}{cl} \begin{array}{ccc} N_1 & N_2 & N_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 20 & 13 & 10 \\ 21 & 12 & 11 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow T_1 \\ \leftarrow T_2 \end{array} \end{array}$$

Na mjestu a_{21} nalazi se cijena proizvoda N_1 u trgovini T_2.

Pitamo se sada koliko bismo platili u trgovini T_1, a koliko u trgovini T_2 ako kupimo 5 komada proizvoda N_1, 3 komada proizvoda N_2 i 4 komada proizvoda N_3. Jasno je da to možemo jednostavno izračunati i bez upotrebe matrica.

$$5 \cdot 20 + 3 \cdot 13 + 4 \cdot 10 = 179 \rightarrow \text{ u trgovini } T_1$$

$$5 \cdot 21 + 3 \cdot 12 + 4 \cdot 11 = 185 \rightarrow \text{ u trgovini } T_2$$

Međutim, možemo definirati jednostupčanu matricu X u kojoj će se nalaziti broj pojedinih proizvoda koje želimo kupiti. Dakle,

$$X = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{broj proizvoda } N_1 \\ \leftarrow \text{broj proizvoda } N_2 \\ \leftarrow \text{broj proizvoda } N_3 \end{array}$$

Sada je

$$AX = \begin{bmatrix} 20 & 13 & 10 \\ 21 & 12 & 11 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 179 \\ 185 \end{bmatrix}$$

Vidimo da su elementi matrice AX upravo tražene cijene koje bismo platili u pojedinim trgovinama za navedenu količinu pojedinih proizvoda.

Svojstva množenja matrica

Iako ne vrijedi komutativnost množenja matrica, mnoga lijepa svojstva množenja koja vrijede za brojeve ostaju sačuvana i kod matrica.

Propozicija 2.

Neka su A, B, C matrice, a $k \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi

1. $A(BC) = (AB)C$
2. $(A + B)C = AC + BC$
3. $A(B + C) = AB + AC$
4. $k(AB) = (kA)B = A(kB)$
5. $AI = IA = A$, *gdje je* A *kvadratna matrica*
6. $(AB)^T = B^T A^T$

kada god su navedeni produkti definirani.

Determinante

Grubo rečeno, determinanta je broj koji se pridružuje kvadratnoj matrici. Ako se radi o kvadratnoj matrici A, tada taj broj označavamo sa $\det A$ ili $|A|$.

Preciznije, **determinanta** kvadratne matrice A reda n je broj

$$\det A = \sum_p (-1)^{I(p)} a_{1p(1)} a_{2p(2)} \cdots a_{np(n)}$$

gdje p prolazi kroz sve permutacije skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$, a $I(p)$ je broj inverzija permutacije p.

Uočimo da se u produktima koji se zbrajaju javljaju po jedan element iz svakog retka i svakog stupca matrice.

Neka je

$$A = [a_{11}]$$

kvadratna matrica reda 1. Determinanta te matrice je tada

$$\det A = |a_{11}| = a_{11}.$$

Dakle, broj koji pridružujemo kvadratnoj matrici reda 1 je baš broj koji piše u toj matrici. Napomenimo samo ovdje, da ne dođe do zabune, $|a_{11}|$ je ovdje oznaka za determinantu, a ne za apsolutnu vrijednost broja a_{11}.

Neka je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

kvadratna matrica reda 2. Determinanta te matrice je

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Neka je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

kvadratna matrica reda 2. Determinanta te matrice je

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} =$$

Neka je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

kvadratna matrica reda 2. Determinanta te matrice je

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} \color{blue}{3} & -2 \\ 4 & \color{blue}{8} \end{vmatrix} = 3 \cdot 8$$

Neka je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

kvadratna matrica reda 2. Determinanta te matrice je

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot 8 - (-2) \cdot 4$$

Neka je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

kvadratna matrica reda 2. Determinanta te matrice je

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot 8 - (-2) \cdot 4 = 32$$

Neka je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

kvadratna matrica reda 3. Determinanta te matrice je

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33} + \\ + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{13}a_{22}$$

Zadatak 1.

Upotrebom definicije determinante provjerite da vrijedi gornja formula za računanje determinante 3. reda.

Sarrusovo pravilo

Formula za računanje determinante 3. reda je malo nezgodna za pamtiti. Međutim, za determinante 3. reda postoji jednostavna shema po kojoj se formiraju svi produkti koji su nam potrebni za računanje njezine vrijednosti. To je tzv. **Sarrusovo pravilo** i ono vrijedi samo za determinante trećeg reda.

Potrebno je prvo nadopisati prva dva stupca desno od determinante i zatim formirati produkte elemenata u smjeru glavne dijagonale, te oduzeti produkte elemenata u smjeru sporedne dijagonale.

Na početku

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

▸ Preskoči objašnjavanje Sarrusa

Nadopišemo prvi stupac

$$\begin{array}{|ccc|c}
\color{blue}{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{11} \\
\color{blue}{a_{21}} & a_{22} & a_{23} & a_{21} \\
\color{blue}{a_{31}} & a_{32} & a_{33} & a_{31}
\end{array}$$

Nadopišemo drugi stupac

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \color{blue}{a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & \color{blue}{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & \color{blue}{a_{32}} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Napišemo jednako

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} =$$

U smjeru glavne dijagonale

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} +$$

U smjeru glavne dijagonale

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31}$$

U smjeru glavne dijagonale

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \color{blue}{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ \color{blue}{a_{21}} & a_{22} \\ a_{31} & \color{blue}{a_{32}} \end{matrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

U smjeru sporedne dijagonale

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & {\color{blue}a_{13}} \\ a_{21} & {\color{blue}a_{22}} & a_{23} \\ {\color{blue}a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13}$$

U smjeru sporedne dijagonale

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} -$$

$$- a_{32}a_{23}a_{11}$$

U smjeru sporedne dijagonale

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} -$$

$$- a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Gotovo je!

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} -$$

$$- a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Vrati se na objašnjavanje Sarrusa

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 8 \\ -3 & 7 & 9 \end{vmatrix}$$

▸ Konačno rješenje

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 8 & 1 \\ -3 & 7 & 9 & -3 \end{array}\right.$$

$$\begin{vmatrix} 3 & {\color{blue}4} & -2 \\ 1 & {\color{blue}2} & 8 \\ -3 & {\color{blue}7} & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \\ -3 & 7 \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 8 \\ -3 & 7 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \\ -3 & 7 \end{matrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 8 \\ -3 & 7 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \\ -3 & 7 \end{matrix} =$$

$$= 3 \cdot 2 \cdot 9 +$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 8 \\ -3 & 7 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \\ -3 & 7 \end{matrix} =$$

$$= 3 \cdot 2 \cdot 9 + 4 \cdot 8 \cdot (-3)$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 8 \\ -3 & 7 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \\ -3 & 7 \end{matrix} =$$

$$= 3 \cdot 2 \cdot 9 + 4 \cdot 8 \cdot (-3) + (-2) \cdot 1 \cdot 7$$

$$\left|\begin{array}{ccc} 3 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 8 \\ -3 & 7 & 9 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 3 & 4 \\ 1 & 2 \\ -3 & 7 \end{array} =$$

$$= 3 \cdot 2 \cdot 9 + 4 \cdot 8 \cdot (-3) + (-2) \cdot 1 \cdot 7 - (-2) \cdot 2 \cdot (-3)$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 8 \\ -3 & 7 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \\ -3 & 7 \end{matrix} =$$

$$= 3 \cdot 2 \cdot 9 + 4 \cdot 8 \cdot (-3) + (-2) \cdot 1 \cdot 7 - (-2) \cdot 2 \cdot (-3) -$$

$$- 3 \cdot 8 \cdot 7$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 8 \\ -3 & 7 & \color{blue}{9} \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & \color{blue}{4} \\ \color{blue}{1} & 2 \\ -3 & 7 \end{matrix} =$$

$$= 3 \cdot 2 \cdot 9 + 4 \cdot 8 \cdot (-3) + (-2) \cdot 1 \cdot 7 - (-2) \cdot 2 \cdot (-3) -$$

$$- 3 \cdot 8 \cdot 7 - 4 \cdot 1 \cdot 9$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 8 \\ -3 & 7 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \\ -3 & 7 \end{matrix} =$$

$$= 3 \cdot 2 \cdot 9 + 4 \cdot 8 \cdot (-3) + (-2) \cdot 1 \cdot 7 - (-2) \cdot 2 \cdot (-3) -$$

$$- 3 \cdot 8 \cdot 7 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = -272$$

◂ Objašnjavanje čitavog postupka

Uočimo da smo kod računanja determinanti drugog reda imali dva sumanda od kojih je svaki bio produkt od dva elementa. Kod determinanti trećeg reda imali smo šest sumanada od kojih je svaki bio produkt od tri elementa. Općenito, kod determinanti n-tog reda imat ćemo $n!$ sumanada od kojih je svaki produkt od n elemenata.

Dakle, računanje determinati višeg reda po definiciji je dugotrajno i takoreći neizvedivo u nekom razumnom vremenu. Već kod determinanti petog reda imali bismo 120 sumanada koji su produkti od pet elemenata.

Stoga nam trebaju neka svojstva determinanti koja će nam olakšati njihovo računanje.

Svojstva determinanti

U ovom dijelu pretpostavljamo da su A i B kvadratne matrice n-tog reda. Ilustraciju svojstava determinanti pokazivat ćemo na determinantama četvrtog reda.

1 $\det A = \det A^T$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 7 \\ 3 & 2 & 0 & -8 \\ 4 & -6 & -7 & 1 \\ 2 & 7 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

Svojstva determinanti

U ovom dijelu pretpostavljamo da su A i B kvadratne matrice n-tog reda. Ilustraciju svojstava determinanti pokazivat ćemo na determinantama četvrtog reda.

1 $\det A = \det A^T$

$$\begin{vmatrix} \color{blue}{1} & \color{blue}{3} & \color{blue}{-2} & \color{blue}{7} \\ 3 & 2 & 0 & -8 \\ 4 & -6 & -7 & 1 \\ 2 & 7 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 7 \end{vmatrix}$$

Svojstva determinanti

U ovom dijelu pretpostavljamo da su A i B kvadratne matrice n-tog reda. Ilustraciju svojstava determinanti pokazivat ćemo na determinantama četvrtog reda.

1 $\det A = \det A^T$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 7 \\ \color{blue}{3} & \color{blue}{2} & \color{blue}{0} & \color{blue}{-8} \\ 4 & -6 & -7 & 1 \\ 2 & 7 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \\ -2 & 0 \\ 7 & -8 \end{vmatrix}$$

Svojstva determinanti

U ovom dijelu pretpostavljamo da su A i B kvadratne matrice n-tog reda. Ilustraciju svojstava determinanti pokazivat ćemo na determinantama četvrtog reda.

1 $\det A = \det A^T$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 7 \\ 3 & 2 & 0 & -8 \\ 4 & -6 & -7 & 1 \\ 2 & 7 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -6 \\ -2 & 0 & -7 \\ 7 & -8 & 1 \end{vmatrix}$$

Svojstva determinanti

U ovom dijelu pretpostavljamo da su A i B kvadratne matrice n-tog reda. Ilustraciju svojstava determinanti pokazivat ćemo na determinantama četvrtog reda.

1 $\det A = \det A^T$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 7 \\ 3 & 2 & 0 & -8 \\ 4 & -6 & -7 & 1 \\ 2 & 7 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & -6 & 7 \\ -2 & 0 & -7 & 2 \\ 7 & -8 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Svojstva determinanti

U ovom dijelu pretpostavljamo da su A i B kvadratne matrice n-tog reda. Ilustraciju svojstava determinanti pokazivat ćemo na determinantama četvrtog reda.

1 $\det A = \det A^T$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 7 \\ 3 & 2 & 0 & -8 \\ 4 & -6 & -7 & 1 \\ 2 & 7 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & -6 & 7 \\ -2 & 0 & -7 & 2 \\ 7 & -8 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

2 Ako su svi elementi jednog reda u determinanti jednaki nula, tada je ta determinanta jednaka nula. Analogno vrijedi i za stupce.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 7 \\ 3 & 2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & -8 \\ -2 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

3 Ako determinanta ima dva jednaka reda, tada je ona jednaka nula. Analogno vrijedi i za stupce.

$$\begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 & -9 \\ 3 & 2 & 0 & -8 \\ 7 & 3 & 2 & -9 \\ 2 & 7 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 4 & 4 & -2 & 7 \\ -2 & -2 & 0 & -8 \\ -3 & -3 & 5 & 3 \\ 8 & 8 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

4 Determinanta jedinične matrice I jednaka je 1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

5 Determinanta gornjetrokutaste ili donjetrokutaste matrice jednaka je produktu elemenata na glavnoj dijagonali.

$$\begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 & -9 \\ 0 & 2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 28$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 \\ -9 & 8 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 7 \cdot 3 \cdot 0 \cdot 4 = 0$$

6 Zamijenimo li mjesta bilo kojim dvama retcima u determinanti, determinanta mijenja predznak. Analogno vrijedi i za stupce.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 7 \\ 3 & 2 & 0 & -8 \\ 4 & -6 & -7 & 1 \\ 2 & 7 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & -6 & -7 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & -8 \\ 1 & 3 & -2 & 7 \\ 2 & 7 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 7 \\ 3 & 2 & 0 & -8 \\ 4 & -6 & -7 & 1 \\ 2 & 7 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 3 & 0 & 2 & -8 \\ 4 & -7 & -6 & 1 \\ 2 & 2 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

7 Ako bilo koji redak u matrici A pomnožimo realnim brojem k, determinanta rezultirajuće matrice jednaka je $k \det A$. Analogno vrijedi i za stupce.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 7 \\ 3 & 2 & 0 & -8 \\ 4 & -6 & -7 & 1 \\ 2 & 7 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ /\cdot 5 \\ \\ \end{matrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 7 \\ 3 & 2 & 0 & -8 \\ 4 & -6 & -7 & 1 \\ 2 & 7 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} & & & /\cdot 3 \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 7 \\ 3 & 2 & 0 & -8 \\ 4 & -6 & -7 & 1 \\ 2 & 7 & 2 & 1 \end{vmatrix} \end{array} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 7 \\ 3 & 2 & 0 & -8 \\ 4 & -6 & -7 & 1 \\ 2 & 7 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

8 Zajednički faktor svih elemenata nekog retka može se izlučiti izvan determinante. Analogno vrijedi i za stupce.

$$\begin{vmatrix} 12 & 8 & 16 & 20 \\ 3 & 2 & 0 & -8 \\ 4 & -6 & -7 & 1 \\ 2 & 7 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 0 & -8 \\ 4 & -6 & -7 & 1 \\ 2 & 7 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & -5 & 1 \\ 3 & 12 & 0 & -8 \\ 4 & 21 & -7 & 1 \\ 2 & -15 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & -8 \\ 4 & 7 & -7 & 1 \\ 2 & -5 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

9 $\det(kA) = k^n \det A$, gdje je n red matrice A

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 7 \\ -2 & -3 & 4 & 8 \\ -3 & 6 & -1 & 9 \end{bmatrix} \qquad 2A = \begin{bmatrix} 6 & 8 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 10 & 14 \\ -4 & -6 & 8 & 16 \\ -6 & 12 & -2 & 18 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 8 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 10 & 14 \\ -4 & -6 & 8 & 16 \\ -6 & 12 & -2 & 18 \end{vmatrix} =$$

9 $\det(kA) = k^n \det A$, gdje je n red matrice A

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 7 \\ -2 & -3 & 4 & 8 \\ -3 & 6 & -1 & 9 \end{bmatrix} \qquad 2A = \begin{bmatrix} 6 & 8 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 10 & 14 \\ -4 & -6 & 8 & 16 \\ -6 & 12 & -2 & 18 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 8 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 10 & 14 \\ -4 & -6 & 8 & 16 \\ -6 & 12 & -2 & 18 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 10 & 14 \\ -4 & -6 & 8 & 16 \\ -6 & 12 & -2 & 18 \end{vmatrix}$$

9 $\det(kA) = k^n \det A,$ gdje je n red matrice A

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 7 \\ -2 & -3 & 4 & 8 \\ -3 & 6 & -1 & 9 \end{bmatrix} \qquad 2A = \begin{bmatrix} 6 & 8 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 10 & 14 \\ -4 & -6 & 8 & 16 \\ -6 & 12 & -2 & 18 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 8 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 10 & 14 \\ -4 & -6 & 8 & 16 \\ -6 & 12 & -2 & 18 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 7 \\ -4 & -6 & 8 & 16 \\ -6 & 12 & -2 & 18 \end{vmatrix}$$

9 $\det(kA) = k^n \det A$, gdje je n red matrice A

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 7 \\ -2 & -3 & 4 & 8 \\ -3 & 6 & -1 & 9 \end{bmatrix} \qquad 2A = \begin{bmatrix} 6 & 8 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 10 & 14 \\ -4 & -6 & 8 & 16 \\ -6 & 12 & -2 & 18 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 8 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 10 & 14 \\ -4 & -6 & 8 & 16 \\ -6 & 12 & -2 & 18 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 7 \\ -2 & -3 & 4 & 8 \\ -6 & 12 & -2 & 18 \end{vmatrix}$$

9 $\det(kA) = k^n \det A,$ gdje je n red matrice A

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 7 \\ -2 & -3 & 4 & 8 \\ -3 & 6 & -1 & 9 \end{bmatrix} \qquad 2A = \begin{bmatrix} 6 & 8 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 10 & 14 \\ -4 & -6 & 8 & 16 \\ -6 & 12 & -2 & 18 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 8 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 10 & 14 \\ -4 & -6 & 8 & 16 \\ -6 & 12 & -2 & 18 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 7 \\ -2 & -3 & 4 & 8 \\ -3 & 6 & -1 & 9 \end{vmatrix}$$

9 $\det(kA) = k^n \det A$, gdje je n red matrice A

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 7 \\ -2 & -3 & 4 & 8 \\ -3 & 6 & -1 & 9 \end{bmatrix} \qquad 2A = \begin{bmatrix} 6 & 8 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 10 & 14 \\ -4 & -6 & 8 & 16 \\ -6 & 12 & -2 & 18 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 8 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 10 & 14 \\ -4 & -6 & 8 & 16 \\ -6 & 12 & -2 & 18 \end{vmatrix} = 2^4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 7 \\ -2 & -3 & 4 & 8 \\ -3 & 6 & -1 & 9 \end{vmatrix}$$

10 Ako neki redak u determinanti dodamo nekom drugom retku, vrijednost determinante se neće promijeniti. Analogno vrijedi za stupce.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 7 \\ 3 & 2 & 0 & -8 \\ 4 & -6 & -7 & 1 \\ 2 & 7 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 7 \\ 3 & 2 & 0 & -8 \\ 7 & -4 & -7 & -7 \\ 2 & 7 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 7 \\ 3 & 2 & 0 & -8 \\ 4 & -6 & -7 & 1 \\ 2 & 7 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 3 & -2 & 7 \\ -5 & 2 & 0 & -8 \\ 5 & -6 & -7 & 1 \\ 3 & 7 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

11 Ako umnožak nekog retka s nekim brojem dodamo nekom drugom retku, vrijednost determinante se neće promijeniti. Analogno vrijedi za stupce.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 7 \\ 3 & 2 & 0 & -8 \\ 4 & -6 & -7 & 1 \\ \color{blue}{2} & \color{blue}{7} & \color{blue}{2} & \color{blue}{1} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ /\cdot 4 \\ \\ + \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 7 \\ 3 & 2 & 0 & -8 \\ 7 & -4 & -7 & -7 \\ \color{blue}{14} & \color{blue}{15} & \color{blue}{2} & \color{blue}{-31} \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} /\cdot(-5) & & + & \\ \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & \color{blue}{-2} & 7 \\ 3 & 2 & \color{blue}{0} & -8 \\ 4 & -6 & \color{blue}{-7} & 1 \\ 2 & 7 & \color{blue}{2} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 3 & \color{blue}{-7} & 7 \\ -5 & 2 & \color{blue}{-15} & -8 \\ 5 & -6 & \color{blue}{-27} & 1 \\ 3 & 7 & \color{blue}{-8} & 1 \end{vmatrix}$$

12 **Binet-Cauchyjev teorem**. Ako su A i B kvadratne matrice istog reda, tada je

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

13 $\det(A^k) = (\det A)^k, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

14 Neka se A i B razlikuju samo u elementima i-tog retka. Tada je $\det A + \det B$ jednaka determinanti matrice čiji je i-ti redak suma odgovarajućih članova i-tih redova iz A i B, a ostali elementi su jednaki odgovarajućim elementima iz A odnosno B. Analogno vrijedi za stupce.

Napomena.

$$\det(A+B) \neq \det A + \det B$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 & a_4+b_4 \\ k & l & m & n \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ k & l & m & n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ k & l & m & n \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a & e & k \\ a_2+b_2 & b & f & l \\ a_3+b_3 & c & g & m \\ a_4+b_4 & d & h & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a & e & k \\ a_2 & b & f & l \\ a_3 & c & g & m \\ a_4 & d & h & n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a & e & k \\ b_2 & b & f & l \\ b_3 & c & g & m \\ b_4 & d & h & n \end{vmatrix}$$

Sada kada smo se upoznali sa nekim svojstvima determinanti, pitamo se kako primijeniti ta svojstva na računanje determinanti reda većeg od tri. Vidjeli smo da se lako računaju determinante gornjetrokutastih i donjetrokutastih matrica kao produkt elemenata na glavnoj dijagonali. Isto tako smo vidjeli da se vrijednost determinante ne mijenja ako neki njezin redak (stupac) pomnožimo nekim brojem i dodamo nekom drugom retku (stupcu) te da pri zamjeni dvaju redaka (stupaca) determinanta samo mijenja predznak. Stoga je ideja da determinantu koju trebamo izračunati pomoću ovih svojstava svedemo na gornjetrokutastu ili donjetrokutastu, tj. da u toj determinanti ispod ili iznad glavne dijagonale napravimo nule.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} /\cdot(-3) \\ + \\ \\ + \end{matrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -5 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & -5 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ /\cdot 2 \\ + \\ + \end{matrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot 7 = -42$$

Minore i kofaktori

Neka je A matrica tipa (m, n). Ako se iz matrice A ukloni $m - k$ redaka i $n - k$ stupaca, preostali elementi čine jednu **submatricu** ili **podmatricu** matrice A, k-tog reda.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 & 7 \\ 8 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Minore i kofaktori

Neka je A matrica tipa (m, n). Ako se iz matrice A ukloni $m-k$ redaka i $n-k$ stupaca, preostali elementi čine jednu **submatricu** ili **podmatricu** matrice A, k-tog reda.

$$A = \begin{bmatrix} \cancel{2} & 3 & 4 & \cancel{6} & 7 \\ \cancel{8} & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{1} \\ \cancel{5} & 4 & 3 & \cancel{2} & 1 \\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{5} & \cancel{6} & \cancel{7} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

B je submatrica reda 2 matrice A

Neka je A kvadratna matrica n-tog reda. **Minora** M_{ij} elementa a_{ij} je determinanta submatrice matrice A koja sadrži elemente koji preostanu nakon što se uklone i-ti redak i j-ti stupac matrice A.

Kofaktor ili **algebarski komplement** elementa a_{ij} je broj

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}}$$

Uočimo da je kofaktor do na predznak jednak minori, što ovisi o parnosti sume njihovih indeksa.

Primjer 10.

Odredite minore i kofaktore matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Rješenje.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Preskoči postupak

Primjer 10.

Odredite minore i kofaktore matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Rješenje.

$$A = \begin{bmatrix} \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{-1} \\ \cancel{3} & 0 & 2 \\ \cancel{3} & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad M_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = -2$$

$M_{11} = -2$, $A_{11} = -2$

Primjer 10.

Odredite minore i kofaktore matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Rješenje.

$$A = \begin{bmatrix} \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{-1} \\ 3 & \cancel{0} & 2 \\ 3 & \cancel{1} & 2 \end{bmatrix} \qquad M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = 0$$

$$M_{11} = -2,\ A_{11} = -2,\ M_{12} = 0,\ A_{12} = 0$$

Primjer 10.

Odredite minore i kofaktore matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Rješenje.

$$A = \begin{bmatrix} \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{-1} \\ 3 & 0 & \cancel{2} \\ 3 & 1 & \cancel{2} \end{bmatrix} \qquad M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = 3$$

$M_{11} = -2$, $A_{11} = -2$, $M_{12} = 0$, $A_{12} = 0$, $M_{13} = 3$, $A_{13} = 3$

Primjer 10.

Odredite minore i kofaktore matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Rješenje.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ \cancel{3} & \cancel{0} & \cancel{2} \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad M_{21} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -3$$

$M_{11} = -2$, $A_{11} = -2$, $M_{12} = 0$, $A_{12} = 0$, $M_{13} = 3$, $A_{13} = 3$, $M_{21} = 3$, $A_{21} = -3$

Primjer 10.

Odredite minore i kofaktore matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Rješenje.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ \cancel{3} & \cancel{0} & \cancel{2} \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = 7$$

$M_{11} = -2,\ A_{11} = -2,\ M_{12} = 0,\ A_{12} = 0,\ M_{13} = 3,$
$A_{13} = 3,\ M_{21} = 3,\ A_{21} = -3,\ M_{22} = 7,\ A_{22} = 7$

Primjer 10.

Odredite minore i kofaktore matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Rješenje.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ \cancel{3} & \cancel{0} & \cancel{2} \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = 1$$

$M_{11} = -2$, $A_{11} = -2$, $M_{12} = 0$, $A_{12} = 0$, $M_{13} = 3$, $A_{13} = 3$, $M_{21} = 3$, $A_{21} = -3$, $M_{22} = 7$, $A_{22} = 7$, $M_{23} = -1$, $A_{23} = 1$

Primjer 10.

Odredite minore i kofaktore matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Rješenje.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad M_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = 2$$

$M_{11} = -2,\ A_{11} = -2,\ M_{12} = 0,\ A_{12} = 0,\ M_{13} = 3,\ A_{13} = 3,\ M_{21} = 3,\ A_{21} = -3,\ M_{22} = 7,\ A_{22} = 7,\ M_{23} = -1,\ A_{23} = 1,\ M_{31} = 2,\ A_{31} = 2$

Primjer 10.

Odredite minore i kofaktore matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Rješenje.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad M_{32} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -7$$

$M_{11} = -2$, $A_{11} = -2$, $M_{12} = 0$, $A_{12} = 0$, $M_{13} = 3$, $A_{13} = 3$, $M_{21} = 3$, $A_{21} = -3$, $M_{22} = 7$, $A_{22} = 7$, $M_{23} = -1$, $A_{23} = 1$, $M_{31} = 2$, $A_{31} = 2$, $M_{32} = 7$, $A_{32} = -7$

Primjer 10.

Odredite minore i kofaktore matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Rješenje.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = -3$$

$M_{11} = -2$, $A_{11} = -2$, $M_{12} = 0$, $A_{12} = 0$, $M_{13} = 3$, $A_{13} = 3$, $M_{21} = 3$, $A_{21} = -3$, $M_{22} = 7$, $A_{22} = 7$, $M_{23} = -1$, $A_{23} = 1$, $M_{31} = 2$, $A_{31} = 2$, $M_{32} = 7$, $A_{32} = -7$, $M_{33} = -3$, $A_{33} = -3$

Primjer 10.

Odredite minore i kofaktore matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Rješenje.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$M_{11} = -2$, $A_{11} = -2$, $M_{12} = 0$, $A_{12} = 0$, $M_{13} = 3$, $A_{13} = 3$, $M_{21} = 3$, $A_{21} = -3$, $M_{22} = 7$, $A_{22} = 7$, $M_{23} = -1$, $A_{23} = 1$, $M_{31} = 2$, $A_{31} = 2$, $M_{32} = 7$, $A_{32} = -7$, $M_{33} = -3$, $A_{33} = -3$

Pokaži postupak

Laplaceov razvoj determinante

Do sada smo se upoznali s mnogim lijepim svojstvima determinanti koja nam olakšavaju računanje njihovih vrijednosti. Jedan od najvažnijih postupaka koji smo do sada upoznali bio je svođenje determinante na gornjetrokutastu ili donjetrokutastu čija se vrijednost lako izračuna, tj. jednaka je produktu elemenata na glavnoj dijagonali.

U ovom dijelu ćemo pokazati kako se računanje determinante n-tog reda može svesti na računanje n determinanti $(n-1)$-og reda.

Primjer 11.

Zadana je matrica $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. *Izračunajte:*

a $\det A$ *preko Sarrusovog pravila*

b $a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$

c $a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$

d $a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23}$

e $a_{12}A_{13} + a_{22}A_{23} + a_{32}A_{33}$

Rješenje.

Kofaktore matrice A smo izračunali u Primjeru 10..

$$A_{11} = -2,\ A_{12} = 0,\ A_{13} = 3,\ A_{21} = -3,\ A_{22} = 7,$$
$$A_{23} = 1,\ A_{31} = 2,\ A_{32} = -7,\ A_{33} = -3$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -7$$

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 3 = -7$$
$$a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 7 + 1 \cdot (-7) = -7$$
$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 2 \cdot (-3) + 1 \cdot 7 + (-1) \cdot 1 = 0$$
$$a_{12}A_{13} + a_{22}A_{23} + a_{32}A_{33} = 1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) = 0$$

Iz prethodnog primjera uočavamo da je

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = \det A.$$

Pomoću skalarnog produkta to možemo zapisati

$$(a_{11}, a_{12}, a_{13}) \cdot (A_{11}, A_{12}, A_{13}) = \det A.$$

Dakle, skalarni produkt prvog retka matrice A s kofaktorima odgovarajućih elemenata tog retka jednak je determinanti matrice A.

Izraz $a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$ zovemo **Laplaceov razvoj determinante po prvom retku** matrice A.

Isto tako, uočavamo da je

$$a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} = \det A.$$

Pomoću skalarnog produkta to možemo zapisati

$$(a_{12}, a_{22}, a_{32}) \cdot (A_{12}, A_{22}, A_{32}) = \det A.$$

Dakle, skalarni produkt drugog stupca matrice A s kofaktorima odgovarajućih elemenata tog stupca jednak je determinanti matrice A.

Izraz $a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$ zovemo **Laplaceov razvoj determinante po drugom stupcu** matrice A.

Nadalje, vidjeli smo da je

$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0$$
$$a_{12}A_{13} + a_{22}A_{23} + a_{32}A_{33} = 0$$

odnosno

$$(a_{11}, a_{12}, a_{13}) \cdot (A_{21}, A_{22}, A_{23}) = 0$$
$$(a_{12}, a_{22}, a_{32}) \cdot (A_{13}, A_{23}, A_{33}) = 0$$

Dakle, skalarni produkt nekog retka matrice A s kofaktorima odgovarajućih elemenata nekog drugog retka jednak je 0. Isto tako, skalarni produkt nekog stupca matrice A s kofaktorima odgovarajućih elemenata nekog drugog stupca jednak je 0.

Činjenice koje smo uočili na prethodnom primjeru vrijede i općenito za bilo koju kvadratnu matricu.

Neka je $A = [a_{ij}]$ kvadratna matrica reda n.

Laplaceov razvoj determinante po i-tom retku

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$$

Laplaceov razvoj determinante po j-tom stupcu

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}$$

Laplaceov razvoj po drugom retku

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} + a_{24}A_{24}$$

$$= -a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} -$$

$$- a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{24} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

Laplaceov razvoj po trećem stupcu

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} + a_{43}A_{43}$$

$$= a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{43}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{vmatrix}$$

Pogledajmo opet determinantu

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Nju smo već prije izračunali svođenjem na trokutastu.

◂ svođenje na trokutastu

Izračunajmo ju sada pomoću Laplaceovog razvoja.

Moramo odabrati neki redak ili stupac u toj determinanti.

Kako možemo birati, uzimamo onaj redak ili stupac u kojemu ima puno nula tako da neke kofaktore nećemo morati računati. Uzmimo, npr. prvi redak.

$$\begin{vmatrix} \color{blue}{1} & \color{blue}{0} & \color{blue}{2} & \color{blue}{0} \\ -1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{12} + 2 \cdot A_{13} + 0 \cdot A_{14}$$

Sada kofaktore A_{12} i A_{14} ne treba računati jer ih množimo s nulom, a preostala dva kofaktora izračunamo pomoću Sarrusovog pravila.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 6 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -30$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -6$$

Stoga je

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-30) + 2 \cdot (-6) = -42$$

Mogli smo odabrati, npr. četvrti stupac pa bismo imali

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot A_{14} + 6 \cdot A_{24} + (-3) \cdot A_{34} + 0 \cdot A_{44}$$

U tom slučaju treba isto izračunati samo dva kofaktora A_{24} i A_{34}.

$$A_{24} = (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 8$$

$$A_{34} = (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 30$$

Stoga je

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 6 \cdot 8 + (-3) \cdot 30 = -42$$

Ako odaberemo drugi redak, tada trebamo izračunati sva četiri kofaktora.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot A_{21} + 4 \cdot A_{22} + 3 \cdot A_{23} + 6 \cdot A_{24}$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 12$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -15$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{24} = (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 8$$

Stoga je

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot 12 + 4 \cdot (-15) + 3 \cdot (-6) + 6 \cdot 8 = -42$$

Napomena.

Vidjeli smo da se računanje determinanti četvrtog reda pomoću Laplaceovog razvoja svodi na računanje najviše četiri determinante trećeg reda (što ovisi o tome da li u toj determinanti ima neki redak ili stupac koji sadrži i nule) koje onda možemo dalje izračunati Sarrusovim pravilom.

Računanje determinante petog reda pomoću Laplaceovog razvoja svodi se na računanje najviše pet determinanti četvrtog reda. No, na te determinante ne možemo primijeniti Sarrusovo pravilo pa ako bismo na svaku od njih primijenili Laplaceov razvoj, dobili bismo najviše 20 determinanti trećeg reda koje bismo onda izračunali Sarrusovim pravilom.

Međutim, 20 determinanti trećeg reda i nije tako mali broj za računanje. A što ako bismo imali determinantu reda većeg od pet? Tada bi taj broj determinanti trećeg reda na koje bi se svela ta determinanta bio znatno veći.

Dakle, samo primjenjivanje Laplaceovog razvoja i nije tako efikasan način za računanje determinanti. To ima smisla do determinanti reda 4. Isto tako ima smisla primjenivati taj postupak ako imamo determinantu u kojoj neki redak ili stupac ima "puno" nula i ako sve ostale determinante na koje se svodi ta determinanta također imaju neki redak ili stupac koji ima "puno" nula jer u tom slučaju treba izračunati samo maleni broj kofaktora.

No, što ako imamo determinantu reda n koja u sebi nema niti jednu nulu ili ih ima jako malo? U tom slučaju odaberemo neki redak ili stupac u toj determinanti. Zatim u odabranom retku ili stupcu odaberemo neki element različit od nule. Sada je ideja da, prije nego primijenimo Laplaceov razvoj, u odabranom retku ili stupcu napravimo same nule, a onaj odabrani element "ostavimo na miru". Nule ćemo napraviti koristeći se činjenicom da determinanta ne mijenja vrijednost ako neki redak ili stupac pomnožimo nekim brojem i dodamo nekom drugom retku, odnosno stupcu.

Ako nakon toga napravimo Laplaceov razvoj po tako transformiranom retku ili stupcu, tada će se determinanta n-tog reda svesti na samo jednu determinantu $(n-1)$-og reda. Ako isti postupak primijenimo na dobivenu determinantu $(n-1)$-og reda, ona će se svesti na samo jednu determinantu $(n-2)$-og reda itd. Dakle, pomoću ovog postupka moguće je svaku determinantu reda $n \geqslant 3$ svesti na samo jednu determinantu reda 3 koju onda možemo izračunati Sarrusovim pravilom ili ju svesti na determinantu reda 2 pa onda nju izračunati.

Pogledajmo opet determinantu

$$\begin{vmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Odaberemo li prvi redak i element $a_{11} = 1$, tada u tom retku na preostalim mjestima želimo napraviti nule. No na dva mjesta već imamo nule, jedino još treba element $a_{13} = 2$ pretvoriti u nulu. To ćemo postići tako da prvi stupac pomnožimo s -2 i dodamo ga trećem stupcu. Nakon toga ćemo primijeniti Laplaceov razvoj po prvom retku i dobit ćemo samo jednu determinantu trećeg reda.

$$\begin{array}{c} \\ /\cdot(-2) \end{array}\begin{vmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -5 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & -5 & 0 \end{vmatrix} = -42$$

Odaberemo li drugi redak u determinanti

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ \boxed{-1} & 4 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

i element $a_{21} = -1$, tada na preostalim mjestima u drugom retku trebamo napraviti nule. Ovaj put imamo više posla jer smo odabrali redak u kojemu nema niti jedne nule. Dakle, prvi stupac množimo sa 4 i dodajemo ga drugom, zatim ga množimo s 3 i dodajemo trećem i na kraju ga množimo sa 6 i dodajemo četvrtom. Nakon toga napravimo Laplaceov razvoj po drugom retku.

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc}
/\cdot 6,\ /\cdot 3,\ /\cdot 4 & + & + & +
\end{array} \\
\begin{vmatrix}
1 & 0 & 2 & 0 \\
\boxed{\color{blue}{-1}} & \color{blue}{4} & \color{blue}{3} & \color{blue}{6} \\
0 & -2 & 1 & -3 \\
3 & 2 & 1 & 0
\end{vmatrix}
\end{array}
=
\begin{vmatrix}
1 & 4 & 5 & 6 \\
-1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -2 & 1 & -3 \\
3 & 14 & 10 & 18
\end{vmatrix}
=
$$

$$
= (-1)^{2+1} \cdot (-1) \cdot
\begin{vmatrix}
4 & 5 & 6 \\
-2 & 1 & -3 \\
14 & 10 & 18
\end{vmatrix}
= -42
$$

Odaberemo li opet drugi redak u determinanti

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & \boxed{3} & 6 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

i element $a_{23} = 3$, tada na preostalim mjestima u drugom retku trebamo napraviti nule. Ovaj put će biti još teže jer će nam se pojaviti razlomci. Dakle, bitno je pametno odabrati redak ili stupac, ali isto tako je bitno pametno odabrati element u odabranom retku ili stupcu.

Pametnim odabirom si olakšavamo kasnije računanje.

$/\cdot(-2)$ $+$

$+$ $/\cdot\frac{-4}{3}$

$+$ $/\cdot\frac{1}{3}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ {\color{blue}-1} & {\color{blue}4} & \boxed{{\color{blue}3}} & {\color{blue}6} \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{8}{3} & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{10}{3} & 1 & -5 \\ \frac{10}{3} & \frac{2}{3} & 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{2+3} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{8}{3} & -4 \\ \frac{1}{3} & -\frac{10}{3} & -5 \\ \frac{10}{3} & \frac{2}{3} & -2 \end{vmatrix} = -42$$

Odaberemo li četvrti stupac u determinanti

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & \boxed{-3} \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

i element $a_{34} = -3$, tada na preostalim mjestima u četvrtom stupcu trebamo napraviti nule. No, na dvama mjestima već imamo nule tako da samo element $a_{24} = 6$ treba pretvoriti u nulu. To ćemo napraviti tako da treći redak pomnožimo sa 2 i dodamo ga drugom retku. Nakon toga napravimo Laplaceov razvoj po četvrtom stupcu.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & \boxed{-3} \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow + \\ /\cdot 2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{3+4} \cdot (-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -42$$

Primjer 12.

Izračunajte determinantu petog reda

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 & -1 & 2 \\ 8 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 5 & 1 & 0 & 3 \\ -8 & -9 & 4 & 6 & 7 \end{vmatrix}.$$

Primjer 12.

Izračunajte determinantu petog reda

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 & -1 & 2 \\ 8 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 5 & 1 & 0 & 3 \\ -8 & -9 & 4 & 6 & 7 \end{vmatrix}.$$

Rješenje.

Odabrat ćemo, npr. četvrti redak i element $a_{41} = 1$. Na preostalim mjestima u četvrtom retku ćemo napraviti nule i zatim primijeniti Laplaceov razvoj po četvrtom retku.

$/\cdot(-3)$ $+$

$/\cdot(-1)$ $+$

$/\cdot(-5)$ $+$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 & -1 & 2 \\ 8 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ \boxed{1} & 5 & 1 & 0 & 3 \\ -8 & -9 & 4 & 6 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -11 & 2 & -1 & -7 \\ 8 & -40 & -6 & 1 & -19 \\ 3 & -11 & -1 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 31 & 12 & 6 & 31 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{4+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -11 & 2 & -1 & -7 \\ -40 & -6 & 1 & -19 \\ -11 & -1 & 6 & -1 \\ 31 & 12 & 6 & 31 \end{vmatrix} =$$

$$
= -\begin{vmatrix} -11 & 2 & \boxed{-1} & -7 \\ -40 & -6 & 1 & -19 \\ -11 & -1 & 6 & -1 \\ 31 & 12 & 6 & 31 \end{vmatrix}
\begin{array}{l} \quad /\cdot 6 \quad /\cdot 6 \\ + \\ + \\ + \end{array}
=
$$

$$
= -\begin{vmatrix} -11 & 2 & -1 & -7 \\ -51 & -4 & 0 & -26 \\ -77 & 11 & 0 & -43 \\ -35 & 24 & 0 & -11 \end{vmatrix} =
$$

$$= -(-1)^{1+3} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -51 & -4 & -26 \\ -77 & 11 & -43 \\ -35 & 24 & -11 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -51 & -4 & -26 \\ -77 & 11 & -43 \\ -35 & 24 & -11 \end{vmatrix} = -11055$$

Propozicija 3.

Neka je $A = [a_{ij}]$ *kvadratna matrica.*

a *Skalarni produkt nekog retka s odgovarajućim kofaktorima tog retka jednak je* $\det A$.

b *Skalarni produkt nekog stupca s odgovarajućim kofaktorima tog stupca jednak je* $\det A$.

c *Skalarni produkt nekog retka s odgovarajućim kofaktorima nekog drugog retka jednak je 0.*

d *Skalarni produkt nekog stupca s odgovarajućim kofaktorima nekog drugog stupca jednak je 0.*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = \delta_{ik} \det A$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ik} = \delta_{jk} \det A$$

Kroneckerov simbol

$$\delta_{pq} = \begin{cases} 1, & p = q \\ 0, & p \neq q \end{cases}$$

Inverzna matrica

Poznato nam je da ako je $a \in \mathbb{R}$, tada njega moramo pomnožiti s $\frac{1}{a}$ da bismo dobili 1 (neutralni element za množenje). Znamo da to možemo napraviti za svaki realni broj a različit od nule i u tom slučaju broj $a^{-1} = \frac{1}{a}$ zovemo inverzni broj broja a.

Dakle, kod brojeva je

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1, \ \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Želimo ovo prenijeti i na matrice.

Neka je A kvadratna matrica. **Inverzna matrica** matrice A je matrica A^{-1} za koju vrijedi

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Dakle, inverzna matrica kvadratne matrice je matrica s kojom ju moramo pomnožiti da bismo dobili jediničnu matricu (neutralni element za množenje).

Napomena.

Znamo da množenje matrica nije komutativno, ali u definiciji zahtijevamo da matrica komutira sa svojom inverznom matricom.

Znamo da svaki realni broj različit od nule ima inverz.

Pitamo se da li svaka kvadratna matrica ima inverznu matricu.

Odgovor je negativan. Nema svaka kvadratna matrica inverznu matricu. Naime, iz

$$AA^{-1} = I$$

slijedi

$$\det\left(AA^{-1}\right) = \det I.$$

Zbog Binet-Cauchyjevog teorema je

$$\det A \det A^{-1} = 1.$$

Stoga je

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Vidimo da ako inverzna matrica A^{-1} postoji, tada je njezina determinanta jednaka recipročnoj vrijednosti determinante matrice A. Drugim riječima, kvadratna matrica čija je determinanta jednaka nula nema inverznu matricu.

Neka je $A = [a_{ij}]$ kvadratna matrica.

Kvadratna matrica A je **regularna** ako je $\det A \neq 0$.

Kvadratna matrica A je **singularna** ako je $\det A = 0$.

Adjunkta matrice A je matrica

$$A^* = [A_{ij}]^T$$

tj., to je transponirana matrica matrice kofaktora elemenata matrice A.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Teorem 1.

Svaka regularna matrica A ima inverznu matricu i vrijedi

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*.$$

Teorem 1.

Svaka regularna matrica A ima inverznu matricu i vrijedi

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*.$$

Dokaz.

$$\left[A \frac{1}{\det A} A^*\right]_{ij} = \frac{1}{\det A} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{kj} = \delta_{ij}$$

$$\left[\frac{1}{\det A} A^* A\right]_{ij} = \frac{1}{\det A} \sum_{k=1}^{n} A_{ik} a_{kj} = \delta_{ij}$$

Stoga je zaista $A \frac{1}{\det A} A^* = \frac{1}{\det A} A^* A = I$, odnosno

$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*$. ♡

Primjer 13.

Odredite inverznu matricu matrice $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *uz uvjet da je* $\det A \neq 0$.

Primjer 13.

Odredite inverznu matricu matrice $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *uz uvjet da je* $\det A \neq 0$.

Rješenje.

Izračunajmo kofaktore matrice A.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}|d| = d$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}|c| = -c$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}|b| = -b$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}|a| = a$$

Sada možemo izračunati adjunktu matrice A.

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Stoga je

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Inverz regularne matrice reda 2 se lagano računa.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Inverz regularne matrice reda 2 se lagano računa.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Na glavnoj dijagonali elementi zamijene mjesta.

Inverz regularne matrice reda 2 se lagano računa.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Na sporednoj dijagonali elementi ostaju na svome mjestu, ali promijene predznak.

Primjer 14.

Odredite inverz matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$.

Primjer 14.

Odredite inverz matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$.

Rješenje.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 1 \cdot 3 = 7$$

$$A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Primjer 15.

Odredite inverz matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Primjer 15.

Odredite inverz matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Rješenje.

Najprije izračunamo determinantu matrice A.

$$\det A = -7$$

Kako je $\det A \neq 0$, matrica A ima inverznu matricu.

Zatim izračunamo kofaktore matrice A.

$$\begin{array}{lll} A_{11} = -2, & A_{12} = 0, & A_{13} = 3 \\ A_{21} = -3, & A_{22} = 7, & A_{23} = 1 \\ A_{31} = 2, & A_{32} = -7, & A_{33} = -3 \end{array}$$

Na kraju odredimo adjunktu matrice A.

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -3 & 7 & 1 \\ 2 & -7 & -3 \end{bmatrix}^T$$

$$A^* = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 0 & 7 & -7 \\ 3 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Stoga je

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* = \frac{-1}{7} \begin{bmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 0 & 7 & -7 \\ 3 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Napomena.

Računanje inverza regularne matrice A po formuli $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*$ je komplicirano ako je red matrice veći od 3. Naime, ako je A regularna matrica reda 4, tada bi za računanje inverza trebalo izračunati 16 determinanti trećeg reda, a ako bi A bila reda 5, tada bi trebalo izračunati 25 determinanti četvrtog reda, itd. Dakle, gornja formula je korisna za teoretska razmatranja, ali za praktične svrhe je neupotrebljiva za matrice velikog reda (čak već za matrice reda 4).

Kasnije ćemo vidjeti kako se efikasno računa inverz matrice reda većeg od 3 pomoću Gaussovog postupka.

Zadatak 2.

Neka je $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ *dijagonalna matrica reda* n.

a *Uz koji uvjet je* D *regularna matrica?*

b *Dokažite da je* $D^{-1} = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{d_1}, \ldots, \frac{1}{d_n}\right)$ *u slučaju da je* D *regularna matrica.*

Propozicija 4.

Za regularne matrice A *i* B *istog reda vrijedi:*

a $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$

b $\left(A^{T}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{T}$

c $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Dokaz.

a $A^{-1}A = AA^{-1} = I$ pa je $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$ jer je inverzna matrica jedinstvena.

Dokaz.

a $A^{-1}A = AA^{-1} = I$ pa je $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$ jer je inverzna matrica jedinstvena.

b $AA^{-1} = A^{-1}A = I \;\Rightarrow\; \left(AA^{-1}\right)^T = \left(A^{-1}A\right)^T = I^T$

$\Rightarrow\; \left(A^{-1}\right)^T A^T = A^T\left(A^{-1}\right)^T = I$

Zbog jedinstvenosti inverzne matrice slijedi da je $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.

Dokaz.

a $A^{-1}A = AA^{-1} = I$ pa je $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$ jer je inverzna matrica jedinstvena.

b $AA^{-1} = A^{-1}A = I \;\Rightarrow\; \left(AA^{-1}\right)^T = \left(A^{-1}A\right)^T = I^T$

$\Rightarrow\; \left(A^{-1}\right)^T A^T = A^T\left(A^{-1}\right)^T = I$

Zbog jedinstvenosti inverzne matrice slijedi da je $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.

c $(AB)\cdot\left(B^{-1}A^{-1}\right) = A\underbrace{\left(BB^{-1}\right)}_{=I}A^{-1} = AA^{-1} = I$

$\left(B^{-1}A^{-1}\right)\cdot(AB) = B^{-1}\underbrace{\left(A^{-1}A\right)}_{=I}B = B^{-1}B = I$

Dakle, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Matrične jednadžbe

Matrične jednadžbe su jednadžbe u kojima se javljaju poznate i nepoznate matrice. Riješiti matričnu jednadžbu znači odrediti sve matrice koje ju zadovoljavaju.

Sjetimo se linearne jednadžbe $ax = b$ s jednom nepoznanicom x, gdje su $a, b \in \mathbb{R}$.

a $a \neq 0$. Jednadžba ima jedinstveno rješenje $x = \frac{b}{a}$.

b $a = 0, \; b = 0$. Jednadžbu zadovoljavaju svi realni brojevi.

c $a = 0, \; b \neq 0$. Jednadžba nema rješenja.

Analogno možemo promatrati i osnovne matrične jednadžbe

$$AX = B \quad \text{i} \quad XA = B.$$

One nisu ekvivalentne jer množenje matrica nije komutativno.

Ako je B nulmatrica, onda gornje jednadžbe zovemo **homogenim**, a ako je B različita od nulmatrice, onda ih zovemo **nehomogenim** jednadžbama.

Pretpostavimo da je A regularna matrica. Tada imamo

$$
\begin{aligned}
A^{-1} \cdot \Big/\, AX &= B && \text{(množenje slijeva s } A^{-1}\text{)} \\
A^{-1}(AX) &= A^{-1}B \\
(A^{-1}A)X &= A^{-1}B && \text{(asocijativnost)} \\
IX &= A^{-1}B \\
X &= A^{-1}B
\end{aligned}
$$

Propozicija 5.

Ako je A regularna matrica, tada jednadžba $AX = B$ ima jedinstveno rješenje $X = A^{-1}B$.

Pretpostavimo da je A regularna matrica. Tada imamo

$$XA = B \Big/ \cdot A^{-1} \qquad \text{(množenje zdesna s } A^{-1}\text{)}$$

$$(XA)A^{-1} = BA^{-1}$$

$$X(AA^{-1}) = BA^{-1} \qquad \text{(asocijativnost)}$$

$$XI = BA^{-1}$$

$$X = BA^{-1}$$

Propozicija 6.

Ako je A regularna matrica, tada jednadžba $XA = B$ ima jedinstveno rješenje $X = BA^{-1}$.

$$AX = B,\ \det A \neq 0 \ \Rightarrow \ X = A^{-1}B$$
$$XA = B,\ \det A \neq 0 \ \Rightarrow \ X = BA^{-1}$$

Vidimo da se u slučaju da je A regularna matrica jednadžbe $AX = B$ i $BX = A$ ponašaju analogno kao i linearna jednadžba $ax = b$ u slučaju da je $a \neq 0$. Naime, rješenje te jednadžbe dobijemo tako da tu jednadžbu podijelimo s a, odnosno pomnožimo s a^{-1}. Kod matričnih jednadžbi radimo istu stvar, samo što je bitno s koje strane množimo s A^{-1} zbog toga jer množenje matrica nije komutativno. Oprez, ne dijelimo s A, nego množimo s A^{-1} jer dijeljenje matrica nije definirano.

Naravno, postavlja se pitanje rješivosti jednadžbi

$$AX = B \quad \text{i} \quad XA = B$$

u slučaju da A nije regularna matrica ili još općenitije, ako je A bilo koja matrica (ne nužno kvadratna).

Specijalni slučaj tog problema obradit ćemo u sljedećem poglavlju o sustavima linearnih jednadžbi, gdje će B biti jednostupčana matrica (a onda mora biti i X jednostupčana matrica).

Primjer 16.

Riješite matričnu jednadžbu $AX + B = A^2X + I$ *ako je*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ i } B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Primjer 16.

Riješite matričnu jednadžbu $AX + B = A^2X + I$ *ako je*

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ *i* $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$.

Rješenje.

$$AX + B = A^2X + I$$
$$AX - A^2X = -B + I$$
$$\left(A - A^2\right)^{-1} \cdot \Big/ \left(A - A^2\right)X = I - B$$
$$X = \left(A - A^2\right)^{-1}(I - B)$$

$X = \left(A - A^2\right)^{-1}(I - B)$ je rješenje zadane matrične jednadžbe jedino uz uvjet da je $A - A^2$ regularna matrica.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix} \qquad A - A^2 = \begin{bmatrix} -6 & -8 \\ -12 & -18 \end{bmatrix}$$

$$I - B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \qquad \left(A - A^2\right)^{-1} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} -18 & 8 \\ 12 & -6 \end{bmatrix}$$

$$X = \left(A - A^2\right)^{-1}(I - B) = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} -18 & 8 \\ 12 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 44 & -32 \\ -30 & 24 \end{bmatrix}$$

Jednadžba $AX + XB = C$

Jednadžba

$$AX + XB = C$$

ne može se riješiti pomoću inverzne matrice. Oprez, ne možemo izlučiti X jer se uz matricu A nalazi s desne strane, a uz matricu B s lijeve strane, a ne smijemo mijenjati redoslijed jer množenje matrica nije komutativno. Dakle,

$$(A + B)X = AX + BX \neq AX + XB$$
$$X(A + B) = XA + XB \neq AX + XB$$

Takva jednadžba se rješava tako da se odredi format matrice X i u zadanu jednadžbu uvrsti matrica tog formata s nepoznatim elementima. Izračuna se matrica na lijevoj strani pa se nakon toga izjednače odgovarajući elementi matrice s lijeve i desne strane. Dobije se sustav linearnih jednadžbi koji se riješi.

Takva jednadžba se rješava tako da se odredi format matrice X i u zadanu jednadžbu uvrsti matrica tog formata s nepoznatim elementima. Izračuna se matrica na lijevoj strani pa se nakon toga izjednače odgovarajući elementi matrice s lijeve i desne strane. Dobije se sustav linearnih jednadžbi koji se riješi.

Primjer 17.

Riješite matričnu jednadžbu

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} X + X \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}.$$

Rješenje.

Matrica X mora biti tipa $(2, 2)$, tj.

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

gdje su $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ nepoznati brojevi koje treba odrediti. Uvrstimo to u jednadžbu i dobivamo

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}.$$

Množenjem matrica na lijevoj strani i zbrajanjem njihovih produkata dobivamo

$$\begin{bmatrix} 3a - b + c & 4b + d \\ -3a + 5c - d & -3b + 6d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}$$

Iz definicije jednakosti dvije matrice slijedi da mora biti

$$\begin{aligned} 3a - b + c &= 5 \\ 4b + d &= 6 \\ -3a + 5c - d &= 7 \\ -3b + 6d &= -3 \end{aligned}$$

Rješenje ovog sustava je $a = \frac{25}{18}$, $b = \frac{13}{9}$, $c = \frac{41}{18}$, $d = \frac{2}{9}$, pa je rješenje zadane matrične jednadžbe matrica

$$X = \begin{bmatrix} \frac{25}{18} & \frac{13}{9} \\ \frac{41}{18} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}$$