

Matematika (PITUP)

Prof.dr.sc. Blaženka Divjak

FOI, Varaždin

Dio III

Skupovi i relacije

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$

$\bar{\rho}$, ρ^c , ρ^d

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

"Umijeće postavljanja pravih pitanja i problema u matematici treba vrednovati više nego njihovo rješavanje"

Georg Cantor

● Skupovi i relacije

- Zadavanje skupa
- Relacije među skupovima
- Partitivni skup
- Operacije sa skupovima
- Svojstva skupovskih operacija
- Kartezijev produkt
- Binarne relacije
- Relacije među elementima zadanog skupa
- Obrat i komplement relacije. Dualna relacija
- Svojstva binarnih relacija
- Relacija ekvivalencije
- Parcijalni uređaj
- Funkcije kao relacije

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$

\bar{p}, ρ^c, ρ^d

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$

\bar{p} , ρ^c , ρ^d

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Georg Cantor – utemeljitelj teorije skupova

Skup je osnovni matematički pojam pa se ne definira.

Skup čine elementi koji su po nekom kriteriju povezani u cjelinu.

Prazan skup je skup koji nema niti jedan element.

Oznaka za prazan skup je \emptyset .

Skup je zadan ako su poznati svi njegovi elementi.

Ako skup A sadrži element a , to zapisujemo u obliku $a \in A$. Ako b nije element skupa A , to zapisujemo u obliku $b \notin A$.

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$ \bar{p} , ρ^c , ρ^d

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Skup se može zadati na dva načina:

- 1 Nabrojanjem elemenata skupa – ovaj način je pogodan samo kada se radi o skupovima koji nemaju veliki broj elemenata ili ako se radi o skupovima kod kojih je jasno od kojih se elemenata sastoje ako se navede nekoliko njihovih elemenata

$$A = \{3, 8, 12, -4\}$$

$$B = \{\clubsuit, \heartsuit, 1\}$$

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Evo nekoliko istinitih relacija:

$$8 \in A, \quad 1 \notin A, \quad \clubsuit \in B, \quad 5 \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$$

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$ \bar{p}, ρ^c, ρ^d

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

- 2 Definiranjem karakterističnog svojstva koji moraju elementi zadovoljavati da bi pripadali skupu.

Opći oblik ovako zadanog skupa je $S = \{x \mid P(x)\}$, što znači da skupu S pripadaju samo oni elementi koji zadovoljavaju predikat $P(x)$.

$$C = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \leq x < 6\}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Naravno, skup C možemo napisati i na prvi način tako da nabrojimo sve njegove elemente

$$C = \{3, 4, 5\}.$$

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$

$$\bar{P}, \rho^c, \rho^d$$

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Sa zadavanjem skupa bilo je dosta problema. Fregeov pristup je bio da svako svojstvo definira neki skup.

Međutim, neki matematičari su uočili da takav pristup dovodi do paradoksa, tj. da se može opisati skup i specificirati objekt za koji se ne može utvrditi da li pripada ili ne pripada tom skupu.

Cantor – ne postoji skup svih skupova

Russellov paradoks o brijauu

U nekom selu postoji brijau koji brije sve one i samo one suseljane koji ne brijau sami sebe. Pitanje je tko brije brijaua?

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$ \bar{P}, ρ^c, ρ^d

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Ako brijač brije sam sebe, onda on radi ono što ne bi smio jer mu u opisu radnog mjesta stoji da brije samo one koji se sami ne briju.

Ako pak brijač ne brije sam sebe, morao bi to uraditi jer on brije one koji se sami ne briju.

Fregeov princip da svako svojstvo definira skup ne vrijedi. Zermelo je utvrdio da kod zadavanja skupa treba uvažiti dodatan zahtjev da se elementi koji određuju skup uzimaju iz nekog **univerzalnog skupa** U na kojemu je definirano svojstvo $P(x)$. Najčešće je jasno o kojem se univerzalnom skupu radi pa se on ne spominje eksplicitno. Skupove brojeva često koristimo kao univerzalne skupove.

Skupovi brojeva

Skup prirodnih brojeva

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Skup cijelih brojeva

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

Skup racionalnih brojeva

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Skup realnih brojeva: \mathbb{R}

Skup kompleksnih brojeva

$$\mathbb{C} = \{x + yi \mid x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$

\bar{p}, p^c, p^d

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Kardinalni broj konačnog skupa

Neka je A skup koji ima konačno mnogo elemenata.

Kardinalni broj skupa A je broj elemenata koje taj skup sadrži.

Oznake za kardinalni broj skupa A su

$$k(A), \quad \text{card } A, \quad |A|$$

Mi ćemo najčešće koristiti oznaku $k(A)$.

Kasnije ćemo strogo matematički definirati pojam kardinalnog broja za bilo koji skup (koji ne mora imati samo konačno mnogo elemenata).

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$

$$\bar{\rho}, \rho^c, \rho^d$$

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Primjer 1.

Odredite kardinalne brojeve skupova $A = \{1, 2, 5, 8\}$ i
 $B = \{a, b, c, d\}$.

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$

$\bar{\rho}, \rho^c, \rho^d$

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$ \bar{p}, ρ^c, ρ^d

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Primjer 1.

Odredite kardinalne brojeve skupova $A = \{1, 2, 5, 8\}$ i $B = \{a, b, c, d\}$.

Rješenje.

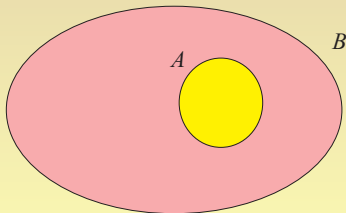
Skup A ima četiri elementa i skup B ima četiri elementa, pa je $k(A) = 4$ i $k(B) = 4$. Ovdje odmah možemo primijetiti da ako dva skupa imaju isti kardinalni broj to ne povlači da oni moraju biti jednaki, tj. da moraju imati iste elemente.

Relacije među skupovima

Relacija sadržavanja

Skup A je **podskup** skupa B ukoliko su svi elementi skupa A ujedno i elementi skupa B .

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$$



Jednakost skupova

Za dva skupa kažemo da su jednaka ukoliko sadrže iste elemente.

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$$

Primjer 2.

Da li su skupovi $A = \{a, b, c\}$ i $B = \{c, c, a, b, b, b\}$ jednaki?

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$

$\bar{\rho}, \rho^c, \rho^d$

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Jednakost skupova

Za dva skupa kažemo da su jednaka ukoliko sadrže iste elemente.

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$$

Primjer 2.

Da li su skupovi $A = \{a, b, c\}$ i $B = \{c, c, a, b, b, b\}$ jednaki?

Rješenje.

$A = B$ zato jer oni sadrže iste elemente. Nije važno ako je neki element napisan više puta i nije važan redoslijed kojim su elementi napisani.

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$

$\bar{\rho}, \rho^c, \rho^d$

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Pravi podskup

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$

\bar{p} , ρ^c , ρ^d

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Skup A je **pravi podskup** skupa B ako je A podskup od B i B sadrži barem jedan element koji nije sadržan u A .

$$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B)$$

Vrijedi također

$$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge \exists x(x \in B \wedge x \notin A))$$

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$ \bar{p}, ρ^c, ρ^d

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Neka je $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, 1, b, 3, 2, 2\}$. Tada je $X \subseteq Y$ jer je svaki element skupa X ujedno i element skupa Y . Međutim, vrijedi i $X \subset Y$ jer je $X \subseteq Y$ i $X \neq Y$.

Za skupove brojeva vrijede sljedeće inkluzije

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Očito je da vrijedi

Propozicija 1.

Za svaki skup A vrijedi $A \subseteq A$ i $\emptyset \subseteq A$.

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$ \bar{p}, ρ^c, ρ^d

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

\emptyset → Ovo je prazan skup i on nema niti jedan element.

$\{\emptyset\}$ → Ovo nije prazan skup. To je skup koji sadrži jedan element i taj element je baš prazan skup. Kratko rečeno, ovo je skup koji sadrži prazan skup, tj. $\emptyset \in \{\emptyset\}$.

$\{\{\emptyset\}\}$ → Ovo je skup koji sadrži jedan element i taj element je skup koji ima jedan element i taj element je baš prazan skup. Kratko rečeno, to je skup koji sadrži skup koji sadrži prazan skup, tj. $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$, ali $\emptyset \notin \{\{\emptyset\}\}$.

$\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \rightarrow$ Ovo je skup koji ima dva elementa \emptyset i $\{\emptyset\}$.

$\{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \rightarrow$ Ovo je skup koji ima samo jedan element $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$

$\bar{\rho}, \rho^c, \rho^d$

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

$\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \rightarrow$ Ovo je skup koji ima dva elementa \emptyset i $\{\emptyset\}$.

$\{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \rightarrow$ Ovo je skup koji ima samo jedan element $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Primjer 3.

Objasnite zašto vrijede sljedeće relacije: $\emptyset \subseteq \{\{\emptyset\}\}$ i $\{\emptyset\} \not\subseteq \{\{\emptyset\}\}$.

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$

$\bar{\rho}, \rho^c, \rho^d$

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$ \bar{p}, ρ^c, ρ^d

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

$\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \rightarrow$ Ovo je skup koji ima dva elementa \emptyset i $\{\emptyset\}$.

$\{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \rightarrow$ Ovo je skup koji ima samo jedan element $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Primjer 3.

Objasnite zašto vrijede sljedeće relacije: $\emptyset \subseteq \{\{\emptyset\}\}$ i $\{\emptyset\} \not\subseteq \{\{\emptyset\}\}$.

Rješenje.

$\emptyset \subseteq \{\{\emptyset\}\}$ vrijedi zbog toga jer je prazan skup podskup svakog skupa.

Što se tiče druge relacije, s lijeve strane imamo skup koji ima jedan element i to baš prazan skup, tj. $\emptyset \in \{\emptyset\}$, ali $\emptyset \notin \{\{\emptyset\}\}$ iz čega slijedi $\{\emptyset\} \not\subseteq \{\{\emptyset\}\}$.

Partitivni skup

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$

\bar{p} , ρ^c , ρ^d

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Partitivni skup skupa A je skup svih podskupova od A .

Partitivni skup skupa A označavamo sa $\mathcal{P}(A)$.

$$\mathcal{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}$$

Kako je $\emptyset \subseteq A$ i $A \subseteq A$, slijedi da je partitivni skup uvijek neprazan skup.

Primjer 4.

Odredite partitivni skup skupa $A = \{a, b, c\}$.

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$

$\bar{\rho}, \rho^c, \rho^d$

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Primjer 4.

Odredite partitivni skup skupa $A = \{a, b, c\}$.

Rješenje.

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\}.$$

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$

$\bar{\rho}, \rho^c, \rho^d$

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$ $\bar{\rho}, \rho^c, \rho^d$

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Primjer 4.

Odredite partitivni skup skupa $A = \{a, b, c\}$.

Rješenje.

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\}.$$

Uočimo da je u prethodnom primjeru bilo $k(A) = 3$, a $k(\mathcal{P}(A)) = 8 = 2^3 = 2^{k(A)}$. To vrijedi i općenito za bilo koji konačan skup A .

Propozicija 2.

Neka je A konačan skup i $k(A) = n$. Tada je
 $k(\mathcal{P}(A)) = 2^n$.

Dokaz.

Trebamo prebrojiti sve podskupove skupa A . Preciznije, trebamo vidjeti koliko k -članih podskupova ima skup A , pri čemu je $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$. Broj k -članih podskupova u n -članom skupu jednak je $\binom{n}{k}$. Stoga je ukupni broj podskupova skupa A jednak

$$k(\mathcal{P}(A)) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$ $\bar{\rho}, \rho^c, \rho^d$

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$ $\bar{\rho}, \rho^c, \rho^d$

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Uvrstimo li $x = y = 1$ u binomnu formulu

$$(x + y)^n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

dobivamo

$$2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k},$$

pa je zaista

$$k(\mathcal{P}(A)) = 2^n.$$

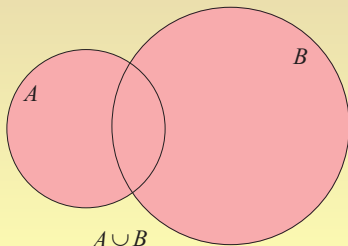


Operacije sa skupovima

Unija

Unija dva skupa A i B je skup $A \cup B$ koji se sastoji od elemenata skupa A i elemenata skupa B .

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$



Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$

\bar{p} , ρ^c , ρ^d

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

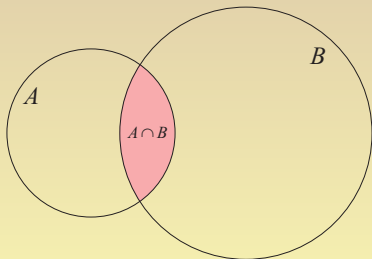
Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Presjek

Presjek dva skupa A i B je skup $A \cap B$ koji se sastoji od elemenata koji pripadaju skupu A i skupu B .

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$



Za skupove A i B kažemo da su **disjunkt**ni ako nemaju zajedničkih elemenata, tj. ako je $A \cap B = \emptyset$.

Definicija unije i presjeka se može proširiti na više od dva skupa.

Unija n skupova A_1, A_2, \dots, A_n je skup

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \{x : x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \dots \vee x \in A_n\}$$

Presjek n skupova A_1, A_2, \dots, A_n je skup

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \{x : x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \dots \wedge x \in A_n\}$$

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$ \bar{p}, ρ^c, ρ^d

Svojstva bin. relacija

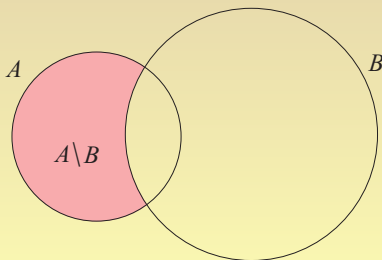
Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Razlika dva skupa A i B je skup $A \setminus B$ koji se sastoji od elemenata koji pripadaju skupu A , a ne pripadaju skupu B .

$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$



Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$

$\bar{\rho}$, ρ^c , ρ^d

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

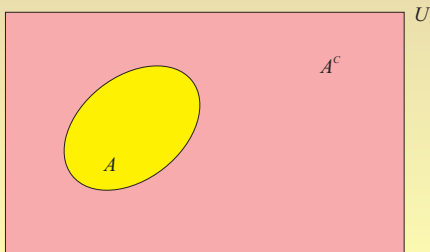
Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Komplement

Komplement skupa A je skup A^c koji se sastoji od svih elemenata iz univerzalnog skupa U koji nisu elementi skupa A . Ponekad komplement od A označavamo s CA ili kada želimo naglasiti univerzalni skup s $C_U A$.

$$A^c = U \setminus A = \{x : x \in U \wedge x \notin A\}$$



Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$

$\bar{\rho}$, ρ^c , ρ^d

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Primjer 5.

Neka je $U = \{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 10\}$ univerzalni skup i neka je $A = \{1, 2, 5, 6, 7, 8\}$ i $B = \{3, 4, 8, 1\}$. Odredite $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ i A^c .

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$ $\bar{\rho}$, ρ^c , ρ^d

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$ $\bar{\rho}, \rho^c, \rho^d$

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Primjer 5.

Neka je $U = \{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 10\}$ univerzalni skup i neka je $A = \{1, 2, 5, 6, 7, 8\}$ i $B = \{3, 4, 8, 1\}$. Odredite $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ i A^c .

Rješenje.

$$A \cup B = \{1, 2, 5, 6, 7, 8, 3, 4\}$$

$$A \cap B = \{1, 8\}$$

$$A \setminus B = \{2, 5, 6, 7\}$$

$$B \setminus A = \{3, 4\}$$

$$A^c = \{3, 4, 9, 10\}$$

Svojstva skupovskih operacija

- Idempotentnost

$$A \cup A = A, \quad A \cap A = A$$

- Komutativnost

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$$

- Asocijativnost

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$

$\bar{\rho}, \rho^c, \rho^d$

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$ \bar{p}, ρ^c, ρ^d

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

● Distributivnost

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

● De Morganovi zakoni

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

● Zakon involucije

$$(A^c)^c = A$$

- Zakon identitete

$$A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \cup U = U, \quad A \cap U = A$$

Primjer 6.

Dokažite da je $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$ $\bar{\rho}, \rho^c, \rho^d$

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

- Zakon identitete

$$A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \cup U = U, \quad A \cap U = A$$

Primjer 6.

Dokažite da je $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

Rješenje.

Dokazat ćemo ovu jednakost na dva načina. Prvi način je pomoću tablice pripadnosti koji se ne može uvijek primijeniti, a drugi način je direktan koji se bazira na definiciji jednakosti dva skupa. Drugi način je zapravo pravi matematički dokaz.

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$

$\bar{\rho}, \rho^c, \rho^d$

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Pomoću tablice pripadnosti

Ako izaberemo neki element x iz univerzalnog skupa U , tada u slučaju dva skupa A i B imamo samo 4 moguća slučaja:

$$(1) x \in A, x \in B \quad (2) x \in A, x \notin B$$

$$(3) x \notin A, x \in B \quad (4) x \notin A, x \notin B$$

Na temelju toga radimo tablicu pripadnosti koja se radi na sličan način kao i semantička tablica za formulu algebre sudova.

A	B	$A \cup B$	$(A \cup B)^c$	A^c	B^c	$A^c \cap B^c$
\in	\in	\in	\notin	\notin	\notin	\notin
\in	\notin	\in	\notin	\notin	\in	\notin
\notin	\in	\in	\notin	\in	\notin	\notin
\notin	\notin	\notin	\in	\in	\in	\in

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$ \bar{p}, p^c, p^d

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Direktan dokaz preko definicije jednakosti skupova

Relacija $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ je zapravo jednakost dva skupa, a iz definicije jednakosti skupova slijedi da moramo dokazati da vrijede sljedeće inkluzije:

$$(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c \quad \text{i} \quad A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c.$$

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$

\bar{p}, ρ^c, ρ^d

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Direktan dokaz preko definicije jednakosti skupova

Relacija $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ je zapravo jednakost dva skupa, a iz definicije jednakosti skupova slijedi da moramo dokazati da vrijede sljedeće inkluzije:

$$(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c \quad \text{i} \quad A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c.$$

Dokažimo prvo da je $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$. Moramo zapravo dokazati da je **svaki** element skupa $(A \cup B)^c$ ujedno i element skupa $A^c \cap B^c$. Uzmimo stoga **bilo koji** $x \in (A \cup B)^c$. To znači da $x \notin A \cup B$. Ako neki element ne pripadi uniji dva skupa, tada on ne pripada niti jednom od ta dva skupa. Dakle, $x \notin A$ i $x \notin B$.

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$ $\bar{\rho}, \rho^c, \rho^d$

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$ $\bar{\rho}, \rho^c, \rho^d$

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

No, tada je $x \in A^c$ i $x \in B^c$. Stoga je $x \in A^c \cap B^c$ (ako neki element pripada nekim dvama skupovima, tada on pripada i njihovom presjeku).

Sjetimo se sada od čega smo krenuli. Uzeli smo **bilo koji** $x \in (A \cup B)^c$ i dokazali da je tada $x \in A^c \cap B^c$, tj. dokazali smo

$$\forall x (x \in (A \cup B)^c \Rightarrow x \in A^c \cap B^c),$$

a to znači da je

$$(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c.$$

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$ \bar{p}, ρ^c, ρ^d

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Na sličan način dokazujemo da je $A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c$.

Uzmimo **bilo koji** $y \in A^c \cap B^c$. Iz definicije presjeka dva skupa slijedi da je tada $y \in A^c$ i $y \in B^c$. Iz definicije komplementa skupa slijedi $y \notin A$ i $y \notin B$. Iz ovoga slijedi $y \notin A \cup B$ (ako neki element ne pripada nekim dvama skupovima, tada on ne pripada niti njihovoj uniji). No, tada je $y \in (A \cup B)^c$. Dakle, dokazali smo da vrijedi

$$\forall y (y \in A^c \cap B^c \Rightarrow y \in (A \cup B)^c),$$

odnosno da je

$$A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c.$$

Dakle, dokazali smo da je

$$(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c \text{ i } A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c,$$

a po definiciji jednakosti dva skupa to znači da je

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

Zadatak 1.

Dokažite preostala navedena svojstva skupovskih operacija na dva načina, preko tablice pripadnosti i direktno preko definicije jednakosti skupova.

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$

$\bar{\rho}, \rho^c, \rho^d$

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$ $\bar{\rho}, \rho^c, \rho^d$

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Napomena.

Uočite da u slučaju da se u nekoj skupovnoj jednakosti javlja n skupova, tada tablica pripadnosti ima 2^n redaka pa je u tom slučaju nezgodno dokazivati tu jednakost na taj način zbog prevelikog broja mogućih slučajeva.

Kompliciranije relacije između skupova je nemoguće dokazivati na taj način, čak ako je i broj skupova koji se javljaju u tim relacijama malen.

Najbolji, odnosno pravi način dokazivanja relacija među skupovima provodi se uz korištenje definicija skupovskih operacija, definicije jednakosti skupova i definicije podskupa. Za takav dokaz potrebno je **razumjeti** te definicije i **primijeniti** ih na pravi način kako smo pokazali u primjeru 6.

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$ $\bar{\rho}, \rho^c, \rho^d$

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Teorem 1.

Za sve skupove A i B vrijedi

a $A \subseteq B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$

b $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$

c $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$ $\bar{\rho}, \rho^c, \rho^d$

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Teorem 1.

Za sve skupove A i B vrijedi

a $A \subseteq B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$

b $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$

c $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$

Dokaz.

Za dokaz tvrdnje (a) imamo dva smjera. Dokažimo prvo da $A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$ $\bar{\rho}, \rho^c, \rho^d$

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Teorem 1.

Za sve skupove A i B vrijedi

a $A \subseteq B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$

b $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$

c $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$

Dokaz.

Za dokaz tvrdnje (a) imamo dva smjera. Dokažimo prvo da $A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

Pretpostavimo da je $A \subseteq B$. Tvrdimo da je tada $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

Teorem 1.

Za sve skupove A i B vrijedi

a $A \subseteq B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$

b $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$

c $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$

Dokaz.

Za dokaz tvrdnje (a) imamo dva smjera. Dokažimo prvo da $A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

Pretpostavimo da je $A \subseteq B$. Tvrdimo da je tada $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

Neka je $X \in \mathcal{P}(A)$. To znači da je $X \subseteq A$. Kako je po pretpostavci $A \subseteq B$, slijedi da je tada i $X \subseteq B$, odnosno $X \in \mathcal{P}(B)$. Dakle, zaista je $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$

\bar{p}, ρ^c, ρ^d

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$ \bar{p}, ρ^c, ρ^d

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Dokažimo da vrijedi i $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \Rightarrow A \subseteq B$.

Pretpostavimo da je $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$. Kako je uvijek $A \in \mathcal{P}(A)$, tada zbog pretpostavke da je $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ slijedi $A \in \mathcal{P}(B)$, a to znači da je $A \subseteq B$.

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$ \bar{p}, ρ^c, ρ^d

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Dokažimo da vrijedi i $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \Rightarrow A \subseteq B$.

Pretpostavimo da je $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$. Kako je uvijek $A \in \mathcal{P}(A)$, tada zbog pretpostavke da je $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ slijedi $A \in \mathcal{P}(B)$, a to znači da je $A \subseteq B$.

Dokažimo sada tvrdnju (b). U toj tvrdnji imamo jednakost dva skupa pa treba dokazati da je $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$ i $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$ \bar{p}, ρ^c, ρ^d

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Dokažimo da vrijedi i $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \Rightarrow A \subseteq B$.

Pretpostavimo da je $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$. Kako je uvijek $A \in \mathcal{P}(A)$, tada zbog pretpostavke da je $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ slijedi $A \in \mathcal{P}(B)$, a to znači da je $A \subseteq B$.

Dokažimo sada tvrdnju (b). U toj tvrdnji imamo jednakost dva skupa pa treba dokazati da je $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$ i $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

Dokažimo prvo da je $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$.

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$ \bar{p}, ρ^c, ρ^d

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Dokažimo da vrijedi i $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \Rightarrow A \subseteq B$.

Pretpostavimo da je $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$. Kako je uvijek $A \in \mathcal{P}(A)$, tada zbog pretpostavke da je $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ slijedi $A \in \mathcal{P}(B)$, a to znači da je $A \subseteq B$.

Dokažimo sada tvrdnju (b). U toj tvrdnji imamo jednakost dva skupa pa treba dokazati da je $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$ i $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

Dokažimo prvo da je $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$.

Neka je $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ proizvoljan. To znači da je $X \in \mathcal{P}(A)$ i $X \in \mathcal{P}(B)$, odnosno $X \subseteq A$ i $X \subseteq B$. No, tada je i $X \subseteq A \cap B$, odnosno $X \in \mathcal{P}(A \cap B)$. Dakle, zaista je $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$.

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$ \bar{p}, ρ^c, ρ^d

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Dokažimo da je također $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

Neka je $Y \in \mathcal{P}(A \cap B)$. To znači da je $Y \subseteq A \cap B$. No,

tada je $Y \subseteq A$ i $Y \subseteq B$. Dakle, $Y \in \mathcal{P}(A)$ i $Y \in \mathcal{P}(B)$

pa je $Y \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$. Dakle, zaista je

$\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$ $\bar{\rho}, \rho^c, \rho^d$

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Dokažimo da je također $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

Neka je $Y \in \mathcal{P}(A \cap B)$. To znači da je $Y \subseteq A \cap B$. No,

tada je $Y \subseteq A$ i $Y \subseteq B$. Dakle, $Y \in \mathcal{P}(A)$ i $Y \in \mathcal{P}(B)$

pa je $Y \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$. Dakle, zaista je

$\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

Dokažimo još tvrdnju (c). Tu treba dokazati inkluziju

$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$ \bar{p}, ρ^c, ρ^d

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Dokažimo da je također $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

Neka je $Y \in \mathcal{P}(A \cap B)$. To znači da je $Y \subseteq A \cap B$. No, tada je $Y \subseteq A$ i $Y \subseteq B$. Dakle, $Y \in \mathcal{P}(A)$ i $Y \in \mathcal{P}(B)$ pa je $Y \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$. Dakle, zaista je $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

Dokažimo još tvrdnju (c). Tu treba dokazati inkluziju $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.

Neka je $X \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$. Tada je $X \in \mathcal{P}(A)$ ili $X \in \mathcal{P}(B)$, odnosno $X \subseteq A$ ili $X \subseteq B$. No, tada je sigurno $X \subseteq A \cup B$ pa je $X \in \mathcal{P}(A \cup B)$.

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$ \bar{p}, ρ^c, ρ^d

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Dokažimo da je također $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

Neka je $Y \in \mathcal{P}(A \cap B)$. To znači da je $Y \subseteq A \cap B$. No, tada je $Y \subseteq A$ i $Y \subseteq B$. Dakle, $Y \in \mathcal{P}(A)$ i $Y \in \mathcal{P}(B)$ pa je $Y \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$. Dakle, zaista je $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

Dokažimo još tvrdnju (c). Tu treba dokazati inkluziju $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.

Neka je $X \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$. Tada je $X \in \mathcal{P}(A)$ ili $X \in \mathcal{P}(B)$, odnosno $X \subseteq A$ ili $X \subseteq B$. No, tada je sigurno $X \subseteq A \cup B$ pa je $X \in \mathcal{P}(A \cup B)$.

Pogledajmo zašto ne vrijedi obrnuta inkluzija.

Neka je $A = \{1, 2\}$, a $B = \{1, 3\}$. Tada je

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

$$\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1, 3\}\}$$

$$\mathcal{P}(A \cup B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

$$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{3\}, \{1, 3\}\}$$

Vidimo da je $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$, ali

$$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \neq \mathcal{P}(A \cup B).$$

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$

\bar{p} , ρ^c , ρ^d

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije



Kartezijev produkt skupova

Dvočlani skup $\{a, b\}$ zove se **par**. Kako se radi o skupu, vrijedi $\{a, b\} = \{b, a\}$. Ovakav skup može se **urediti** tako da razlikujemo njegovu prvu i drugu komponentu i u tom slučaju ga zovemo **uređenim parom** i za njega koristimo oznaku (a, b) .

Općenito je $(a, b) \neq (b, a)$, a jednakost vrijedi jedino u slučaju $a = b$.

Definicija uređenog para (**K. Kuratowski**)

$$(a, b) = \{a, \{a, b\}\}$$

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$

$\bar{\rho}, \rho^c, \rho^d$

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Zadatak 2.

Koristeći definiciju Kuratowskog dokažite da vrijedi:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ i } b = d$$

Neka su A i B neprazni skupovi. **Kartezijev produkt** skupova A i B je skup $A \times B$ koji se sastoji od svih uređenih parova čija prva komponenta pripada skupu A , a druga skupu B .

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$$

U slučaju da je $A = \emptyset$ ili $B = \emptyset$, tada je $A \times B = \emptyset$.

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$

$\bar{\rho}, \rho^c, \rho^d$

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Kartezijev produkt $A \times A$ zapisujemo kratko A^2 i zovemo ga **Kartezijevim kvadratom** skupa A .

$$A^2 = A \times A$$

Kartezijev produkt skupova može se proširiti i na konačno mnogo skupova.

Neka su A_1, A_2, \dots, A_n neprazni skupovi. Kartezijev produkt skupova A_1, A_2, \dots, A_n je skup

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_i \in A_i, i = 1, \dots, n\}$$

(a_1, a_2, \dots, a_n) zovemo **uređenom n -torkom** i kod nje je važan poredak elemenata. Element a_i zove se i -ta komponenta n -torke.

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$

\bar{p}, ρ^c, ρ^d

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$ $\bar{\rho}, \rho^c, \rho^d$

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

U slučaju da je za neki $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ $A_i = \emptyset$, tada je $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \emptyset$.

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_n$$

Napomena.

Definicija Kartezijevog produkta skupova može se proširiti i na beskonačno mnogo skupova. Međutim, mi ovdje nećemo toliko duboko ulaziti u tu teoriju.

Primjer 7.

Neka je $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{a, b\}$. Odredite $A \times B$,
 $B \times A$ i A^2 .

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$

\bar{p} , ρ^c , ρ^d

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Primjer 7.

Neka je $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{a, b\}$. Odredite $A \times B$,
 $B \times A$ i A^2 .

Rješenje.

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$$

$$A^2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$ $\bar{\rho}, \rho^c, \rho^d$

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Primjer 7.

Neka je $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{a, b\}$. Odredite $A \times B$,
 $B \times A$ i A^2 .

Rješenje.

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$$

$$A^2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

Odmah ovdje jedna napomena. Nije $A^2 = \{1, 4, 9\}$ jer smo se dogovorili da kada se radi o skupovima, tada je $A^2 = A \times A$.

Također, uočavamo da je

$$A \times B \neq B \times A$$

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$ \bar{p}, ρ^c, ρ^d

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Primjer 8.

Prikažite grafički $A \times B$ ako je

$$(a) A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 3, 5\} \quad (b) A = [1, 3], B = \langle 2, 5 \rangle$$

Rješenje.

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$

\bar{p}, ρ^c, ρ^d

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

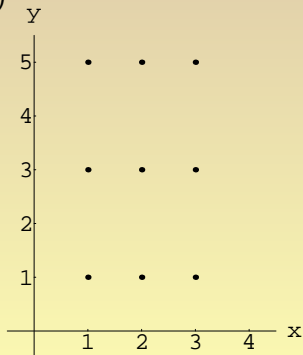
Primjer 8.

Prikažite grafički $A \times B$ ako je

(a) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ (b) $A = [1, 3]$, $B = \langle 2, 5 \rangle$

Rješenje.

(a)



Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$

\bar{p} , ρ^c , ρ^d

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

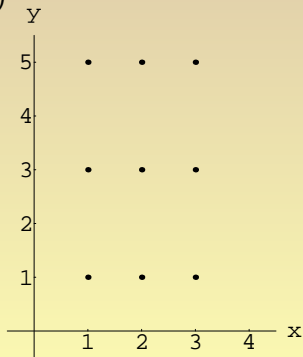
Primjer 8.

Prikažite grafički $A \times B$ ako je

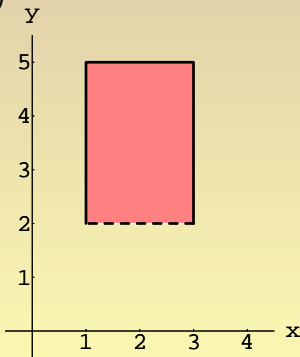
(a) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ (b) $A = [1, 3]$, $B = \langle 2, 5 \rangle$

Rješenje.

(a)



(b)



Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$ \bar{p} , ρ^c , ρ^d

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Primjer 9.

Što predstavljaju sljedeći Kartezijevi produkti:

(a) $\text{pravac} \times \text{pravac}$ (b) $\text{pravac} \times \text{kružnica}$

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$

$\bar{\rho}, \rho^c, \rho^d$

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$ $\bar{\rho}, \rho^c, \rho^d$

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Primjer 9.

Što predstavljaju sljedeći Kartezijevi produkti:

(a) $\text{pravac} \times \text{pravac}$ (b) $\text{pravac} \times \text{kružnica}$

Rješenje.

$\text{pravac} \times \text{pravac} = \text{ravnina}$

$\text{pravac} \times \text{kružnica} = \text{cilindar}$

Primjer 10.

Dokažite da vrijedi $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$ $\bar{\rho}, \rho^c, \rho^d$

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$ \bar{p}, ρ^c, ρ^d

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Primjer 10.

Dokažite da vrijedi $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

Rješenje.

Treba dokazati jednakost dva skupa, a to znači da treba dokazati da je $A \times (B \cup C) \subseteq (A \times B) \cup (A \times C)$ i $(A \times B) \cup (A \times C) \subseteq A \times (B \cup C)$.

Primjer 10.

Dokažite da vrijedi $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

Rješenje.

Treba dokazati jednakost dva skupa, a to znači da treba dokazati da je $A \times (B \cup C) \subseteq (A \times B) \cup (A \times C)$ i $(A \times B) \cup (A \times C) \subseteq A \times (B \cup C)$.

Dokažimo prvo da je $A \times (B \cup C) \subseteq (A \times B) \cup (A \times C)$.

Neka je $x \in A \times (B \cup C)$ proizvoljan. To znači da je $x = (x_1, x_2)$ pri čemu je $(x_1 \in A) \wedge (x_2 \in B \cup C)$, odnosno $(x_1 \in A) \wedge ((x_2 \in B) \vee (x_2 \in C))$. Koristeći distributivnost konjunkcije prema disjunkciji, slijedi da je $((x_1 \in A) \wedge (x_2 \in B)) \vee ((x_1 \in A) \wedge (x_2 \in C))$.

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$ \bar{p}, ρ^c, ρ^d

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Kako je $x = (x_1, x_2)$, slijedi da je

$$(x \in A \times B) \vee (x \in A \times C),$$

odnosno

$$x \in (A \times B) \cup (A \times C).$$

Dakle, zaista je $A \times (B \cup C) \subseteq (A \times B) \cup (A \times C)$.

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$

$\bar{\rho}, \rho^c, \rho^d$

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Kako je $x = (x_1, x_2)$, slijedi da je

$$(x \in A \times B) \vee (x \in A \times C),$$

odnosno

$$x \in (A \times B) \cup (A \times C).$$

Dakle, zaista je $A \times (B \cup C) \subseteq (A \times B) \cup (A \times C)$.

Dokažimo još da je i $(A \times B) \cup (A \times C) \subseteq A \times (B \cup C)$.

Neka je $y \in (A \times B) \cup (A \times C)$ proizvoljan. To znači

da je $(y \in A \times B) \vee (y \in A \times C)$. Slijedi da je

$y = (y_1, y_2)$ pri čemu vrijedi

$$((y_1 \in A) \wedge (y_2 \in B)) \vee ((y_1 \in A) \wedge (y_2 \in C)).$$

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$

\bar{p}, ρ^c, ρ^d

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Koristeći distributivnost konjunkcije prema disjunkciji, slijedi da je

$$(y_1 \in A) \wedge ((y_2 \in B) \vee (y_2 \in C)),$$

odnosno

$$(y_1 \in A) \wedge (y_2 \in B \cup C).$$

Kako je $y = (y_1, y_2)$, slijedi da je $y \in A \times (B \cup C)$, pa je stvarno $(A \times B) \cup (A \times C) \subseteq A \times (B \cup C)$.

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$

$\bar{\rho}, \rho^c, \rho^d$

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Binarne relacije

Pojam relacije je važan matematički pojam koji ima široku primjenu u informatici (relacijske baze podataka), gdje se često upotrebljavaju specijalne relacije kao što su relacije ekvivalencije, relacije parcijalnog uređaja i funkcije koje možemo promatrati kao relacije.

Posebno ćemo promatrati binarne relacije koje se najviše pojavljuju u raznim primjenama i njih ćemo kratko zvati relacije.

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$

\bar{P} , ρ^c , ρ^d

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$ $\bar{\rho}, \rho^c, \rho^d$

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Neka su A i B neprazni skupovi. Svaki podskup ρ od $A \times B$ zovemo **relacija** na $A \times B$.

Ako je $(a, b) \in \rho$, tada kratko pišemo $a \rho b$ i kažemo da je a u relaciji ρ sa b .

Ako je $(a, b) \notin \rho$, tada pišemo $a \not\rho b$ i kažemo da a nije u relaciji ρ sa b .

Primjer 11.

$$A = \{Ivo, Joža, Marko, Stjepan\}, B = \{Katica, Maja, Ivona\}$$

Neka je relacija $\rho =$ "biti zaljubljen" i uzmimo da je

$$\rho = \{(Ivo, Katica), (Joža, Ivona), (Marko, Katica), (Stjepan, Maja)\}.$$

Očito je $\rho \subseteq A \times B$, pa je ρ jedna relacija na $A \times B$.

Npr., $(Ivo, Katica) \in \rho$, odnosno vrijedi Ivo ρ Katica, odnosno riječima bismo rekli "Ivo je zaljubljen u Katicu".

$(Stjepan, Katica) \notin \rho$, odnosno vrijedi Stjepan $\not\rho$ Katica, odnosno riječima bismo rekli "Stjepan nije zaljubljen u Katicu".

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$ $\bar{\rho}, \rho^c, \rho^d$

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Primjer 12.

Neka je $A = \{a, b, c\}$ i $B = \{1, 2\}$. Napišite barem dvije relacije na $A \times B$ i $B \times A$.

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$

$\bar{\rho}, \rho^c, \rho^d$

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Primjer 12.

Neka je $A = \{a, b, c\}$ i $B = \{1, 2\}$. Napišite barem dvije relacije na $A \times B$ i $B \times A$.

Rješenje.

Trebamo zapravo napisati dva proizvoljna podskupa na $A \times B$, odnosno $B \times A$.

$$\rho_1 = \{(a, 1), (b, 1)\} \leftarrow \text{relacija na } A \times B$$

$$\rho_2 = \{(b, 2)\} \leftarrow \text{relacija na } A \times B$$

$$\rho_3 = \{(1, c), (1, b), (2, b)\} \leftarrow \text{relacija na } B \times A$$

$$\rho_4 = \emptyset \leftarrow \text{relacija na } B \times A \text{ (**prazna relacija**)}$$

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$ $\bar{\rho}, \rho^c, \rho^d$

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Primjer 13.

Ako je $k(A) = m$, $k(B) = n$, koliko ima različitih binarnih relacija na $A \times B$?

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$

$\bar{\rho}$, ρ^c , ρ^d

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Primjer 13.

Ako je $k(A) = m$, $k(B) = n$, koliko ima različitih binarnih relacija na $A \times B$?

Rješenje.

Kako je $k(A) = m$, $k(B) = n$, slijedi da je $k(A \times B) = mn$. Relacija je proizvoljan podskup od $A \times B$ pa je broj različitih relacija na $A \times B$ jednak ukupnom broju podskupova od $A \times B$, a taj broj je jednak 2^{mn} .

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$

\bar{p} , ρ^c , ρ^d

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Relacije među elementima zadanog skupa

Pretpostavimo da je ρ relacija na skupu A , tj. $\rho \subseteq A \times A$. Takva relacija ρ se može prikazati pomoću grafa. **Čvor** ili **vrh** grafa je svaki element skupa A , a svakom uređenom paru $(a, b) \in \rho$ pridružen je jedan **luk** pri čemu se prva komponenta naziva izlaznim čvorom grafa, a druga komponenta ulaznim čvorom.

Graf relacije $\rho \subseteq A \times A$ je par (A, ρ) pri čemu je A skup čvorova (vrhova) grafa, a ρ skup lukova (bridova) grafa.

Matrica incidencije relacije $\rho \subseteq A \times A$ je tablica u kojoj se na odgovarajućem mjestu nalazi 1 ili 0, ovisno o tome da li su odgovarajući elementi u relaciji ρ ili nisu.

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$

$\bar{\rho}, \rho^c, \rho^d$

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Primjer 14.

Prikažite sljedeće relacije pomoću grafa i matrice incidencije:

a $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $\rho \subseteq A^2$, $\rho = \{(x, y) : x \mid y\}$

b $A = \{a, b, c\}$, $\rho \subseteq A^2$, $\rho = \{(a, a), (a, c), (b, b), (c, a)\}$

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$ $\bar{\rho}$, ρ^c , ρ^d

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Primjer 14.

Prikažite sljedeće relacije pomoću grafa i matrice incidencije:

a $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $\rho \subseteq A^2$, $\rho = \{(x, y) : x \mid y\}$

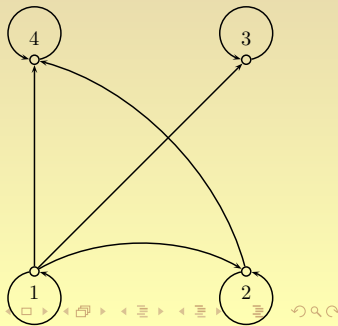
b $A = \{a, b, c\}$, $\rho \subseteq A^2$, $\rho = \{(a, a), (a, c), (b, b), (c, a)\}$

Rješenje.

(a) Matrica incidencije

$x \backslash y$	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	0	1	0	1
3	0	0	1	0
4	0	0	0	1

Graf relacije

**Skupovi i relacije**

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$ $\bar{\rho}$, ρ^c , ρ^d

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

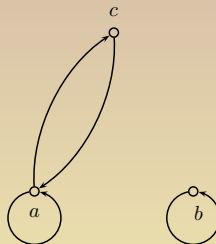
Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

(b) Matrica incidencije

$x \setminus y$	a	b	c
a	1	0	1
b	0	1	0
c	1	0	0

Graf relacije



Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$ $\bar{\rho}, \rho^c, \rho^d$

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Obrat i komplement relacije. Dualna relacija

Neka je $\rho \subseteq A^2$.

Obrat $\bar{\rho}$ relacije ρ

$$(a, b) \in \bar{\rho} \Leftrightarrow (b, a) \in \rho$$

Komplement ρ^c relacije ρ

$$(a, b) \in \rho^c \Leftrightarrow (a, b) \notin \rho$$

Dualna relacija ρ^d relacije ρ

$$(a, b) \in \rho^d \Leftrightarrow (b, a) \notin \rho$$

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$

$\bar{\rho}, \rho^c, \rho^d$

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Propozicija 3.

Neka je $\rho \subseteq A^2$ relacija. Tada vrijedi $\rho^d = \bar{\rho}^c = \overline{\rho^c}$.

Dokaz.

Dokažimo prvo da je $\rho^d = \overline{\rho^c}$. Treba zapravo dokazati jednakost dva skupa.

$$(a, b) \in \rho^d \Leftrightarrow (b, a) \notin \rho \Leftrightarrow (b, a) \in \rho^c \Leftrightarrow (a, b) \in \overline{\rho^c}$$

Dakle, zaista je $\rho^d = \overline{\rho^c}$. Dokažimo još da je $\bar{\rho}^c = \overline{\rho^c}$.

$$\begin{aligned} (a, b) \in \bar{\rho}^c &\Leftrightarrow (a, b) \notin \bar{\rho} \Leftrightarrow (b, a) \notin \rho \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (b, a) \in \rho^c \Leftrightarrow (a, b) \in \overline{\rho^c} \end{aligned}$$

Dakle, zaista je i $\bar{\rho}^c = \overline{\rho^c}$.



Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$

$\bar{\rho}, \rho^c, \rho^d$

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Primjer 15.

Neka je $A = \{a, b, c\}$ i $\rho = \{(a, b), (a, c), (b, a), (b, b)\}$.

Odredite obrat, komplement i dualnu relaciju od ρ .

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$

$\bar{\rho}, \rho^c, \rho^d$

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Primjer 15.

Neka je $A = \{a, b, c\}$ i $\rho = \{(a, b), (a, c), (b, a), (b, b)\}$.

Odredite obrat, komplement i dualnu relaciju od ρ .

Rješenje.

$$\bar{\rho} = \{(b, a), (c, a), (a, b), (b, b)\}$$

$$A \times A = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), \\ (c, a), (c, b), (c, c)\}$$

$$\rho^c = (A \times A) \setminus \rho = \{(a, a), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$$

$$\rho^d = \overline{\rho^c} = \{(a, a), (c, b), (a, c), (b, c), (c, c)\}$$

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$ $\bar{\rho}, \rho^c, \rho^d$

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Svojstva binarnih relacija

Binarna relacija $\rho \subseteq A \times A$ je

1 **refleksivna** ako vrijedi

$$(\forall x \in A) \left((x, x) \in \rho \right)$$

2 **simetrična** ako vrijedi

$$(\forall x, y \in A) \left((x, y) \in \rho \Rightarrow (y, x) \in \rho \right)$$

3 **tranzitivna** ako vrijedi

$$(\forall x, y, z \in A) \left(((x, y) \in \rho \wedge (y, z) \in \rho) \Rightarrow (x, z) \in \rho \right)$$

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$

$\bar{\rho}, \rho^c, \rho^d$

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

4 irefleksivna ako vrijedi

$$(\forall x \in A) \left((x, x) \notin \rho \right)$$

5 antisimetrična ako vrijedi

$$(\forall x, y \in A) \left(((x, y) \in \rho \wedge (y, x) \in \rho) \Rightarrow x = y \right)$$

ili ekvivalentno

$$(\forall x, y \in A) \left(((x, y) \in \rho \wedge x \neq y) \Rightarrow (y, x) \in \rho^c \right)$$

6 asimetrična ako vrijedi

$$(\forall x, y \in A) \left((x, y) \in \rho \Rightarrow (y, x) \in \rho^c \right)$$

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$ $\bar{\rho}, \rho^c, \rho^d$

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$ $\bar{\rho}$, ρ^c , ρ^d

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

7 **kompletna** ako vrijedi

$$(\forall x, y \in A, x \neq y) \left((x, y) \in \rho \vee (y, x) \in \rho \right)$$

8 **strogo kompletna** ako vrijedi

$$(\forall x, y \in A) \left((x, y) \in \rho \vee (y, x) \in \rho \right)$$

Lema 1.

Neka je $\rho \subseteq A^2$ irefleksivna i tranzitivna relacija. Tada je ρ asimetrična relacija.

Dokaz.

Pretpostavimo suprotno, tj. da ρ nije asimetrična relacija.

Tada postoje $a, b \in A$ takvi da je $(a, b) \in \rho$ i $(b, a) \in \rho$.

Po pretpostavci je ρ tranzitivna pa je tada $(a, a) \in \rho$, što je kontradikcija s pretpostavkom da je ρ irefleksivna relacija.



Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$

$\bar{\rho}$, ρ^c , ρ^d

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Pogledajmo sada primjer relacije koja je antisimetrična, a nije asimetrična.

Neka je $A = \{1, 2, 3\}$, a $\rho = \{(1, 1), (2, 2)\}$. Tada je ρ antisimetrična relacija. Dokažimo to. Razlikujemo dva slučaja.

a Ako je $(x, y) \in \rho$, tada je $x = y$ pa je implikacija

$$\underbrace{\underbrace{((x, y) \in \rho)}_1 \wedge \underbrace{x \neq y}_0}_{0} \Rightarrow (y, x) \in \rho^c$$

istinita (nula povlači bilo što je uvijek istina).

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$

$\bar{\rho}$, ρ^c , ρ^d

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

b Ako $(x, y) \notin \rho$, tada je implikacija

$$\underbrace{\underbrace{((x, y) \in \rho \wedge x \neq y)}_0}_{0} \Rightarrow (y, x) \in \rho^c$$

istinita (nula povlači bilo što je uvijek istina).

Međutim ρ nije asimetrična relacija. Naime, da bi ρ bila asimetrična relacija, trebalo bi vrijediti

$$(\forall x, y \in A) \left((x, y) \in \rho \Rightarrow (y, x) \in \rho^c \right).$$

No, to ne vrijedi za $x = 1$ i $y = 1$ zbog

$$\underbrace{\underbrace{(1, 1) \in \rho}_1}_{0} \Rightarrow \underbrace{(1, 1) \in \rho^c}_0$$

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$

$\bar{\rho}$, ρ^c , ρ^d

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Vidjeli smo da nije svaka antisimetrična relacija ujedno i asimetrična. Međutim, svaka asimetrična relacija je i antisimetrična relacija. Naime, iz definicije asimetrične relacije slijedi da je uvijek barem jedna od tvrdnji $(x, y) \in \rho$ i $(y, x) \in \rho$ lažna pa je implikacija

$$\underbrace{((x, y) \in \rho \wedge (y, x) \in \rho)}_0 \Rightarrow x = y$$

istinita, što znači da je ta relacija antisimetrična.

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$ $\bar{\rho}, \rho^c, \rho^d$

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Pogledajmo razliku između kompletne i strogo kompletne relacije.

Relacija \leq "biti manji od" je strogo kompletna relacija na skupu \mathbb{R} jer za svaka dva broja x i y vrijedi jedna od tvrdnji $x \leq y$ ili $y \leq x$.

Relacija $<$ "biti strogo manji od" je kompletna relacija na \mathbb{R} jer za svaka dva **različita** broja x i y vrijedi jedna od tvrdnji $x < y$ ili $y < x$. Međutim, ta relacija nije strogo kompletna jer **ne vrijedi** $x < x$, tj. broj nije strogo manji od samog sebe.

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$

\bar{p} , ρ^c , ρ^d

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Relacija ekvivalencije

Relacija ekvivalencije predstavlja oslabljeni oblik jednakosti. Detaljnije ćemo to kasnije objasniti.

Neka je $\rho \subseteq A^2$. Relacija ρ je relacija ekvivalencije ako je

❶ **refleksivna**, tj.

$$(\forall x \in A) \left((x, x) \in \rho \right)$$

❷ **simetrična**, tj.

$$(\forall x, y \in A) \left((x, y) \in \rho \Rightarrow (y, x) \in \rho \right)$$

❸ **tranzitivna**, tj.

$$(\forall x, y, z \in A) \left(((x, y) \in \rho \wedge (y, z) \in \rho) \Rightarrow (x, z) \in \rho \right)$$

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$

$\bar{\rho}$, ρ^c , ρ^d

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Primjer 16.

Primjeri relacija ekvivalencije:

- 1 Univerzalna relacija – svi elementi skupa su u relaciji sa svima, tj. $\rho = A \times A$
- 2 Jednakost " $=$ " na skupu A
- 3 Paralelnost " \parallel " na skupu svih pravaca ravnine
- 4 Sukladnost trokuta na skupu svih trokuta ravnine
- 5 Sličnost trokuta na skupu svih trokuta ravnine

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$

$\bar{\rho}$, ρ^c , ρ^d

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$ \bar{p}, ρ^c, ρ^d

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Pogledajmo zašto je relacija "biti paralelan" relacija ekvivalencije na skupu svih pravaca ravnine. Trebamo provjeriti da je ta relacija refleksivna, simetrična i tranzitivna.

Da li je refleksivna? Drugim riječima, da li je svaki pravac paralelan sam sa sobom? Da.

Da li je simetrična? Drugim riječima, ako je pravac p paralelan s pravcem q , da li je onda pravac q paralelan s pravcem p ? Da.

Da li je tranzitivna? Drugim riječima, ako je pravac p paralelan s pravcem q , i ako je pravac q paralelan s pravcem r , da li je onda pravac p paralelan s pravcem r ? Da.

Primjer 17.

Neka je $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $\rho \subseteq A^2$,

$\rho = \{(x, y) : x - y \text{ je neparan ili } 0\}$. Ispišite elemente zadane relacije i prikažite ju pomoću tablice i grafa. Da li je to relacija ekvivalencije?

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$

$\bar{\rho}$, ρ^c , ρ^d

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Primjer 17.

Neka je $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $\rho \subseteq A^2$,

$\rho = \{(x, y) : x - y \text{ je neparan ili } 0\}$. Ispišite elemente zadane relacije i prikažite ju pomoću tablice i grafa. Da li je to relacija ekvivalencije?

Rješenje.

$$\rho = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), \\ (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 3), (4, 4)\}$$

Matrica incidencije

$x \backslash y$	1	2	3	4
1	1	1	0	1
2	1	1	1	0
3	0	1	1	1
4	1	0	1	1

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

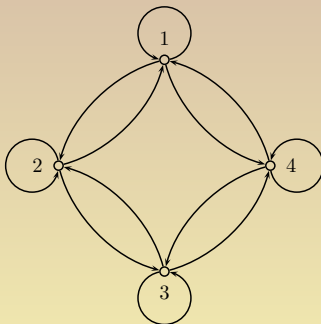
Relacije na $A \times A$ $\bar{\rho}, \rho^c, \rho^d$

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Graf relacije ρ 

Relacija ρ je refleksivna jer je svaki element iz A u relaciji sam sa sobom, što se vidi također iz tablice jer se na glavnoj dijagonali nalaze jedinice. Isto tako se vidi i iz grafa jer u svakom vrhu imamo petlju.

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$ $\bar{\rho}$, ρ^c , ρ^d

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Relacija ρ je simetrična jer je njezina matrica incidencije simetrična s obzirom na glavnu dijagonalu, tj. kada god je $(a, b) \in \rho$, tada je i $(b, a) \in \rho$. Također, simetriju možemo lagano vidjeti i sa grafa. Naime, ako imamo neki brid koji počinje u vrhu a , a završava u vrhu b , tada moramo imati i brid koji počinje u vrhu b , a završava u vrhu a da bi relacija bila simetrična.

Zadana relacija ρ nije tranzitivna jer, npr. $(1, 2) \in \rho$ i $(2, 3) \in \rho$, ali $(1, 3) \notin \rho$. Dakle, relacija ρ nije relacija ekvivalencije zbog toga jer nije tranzitivna.

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$

$\bar{\rho}$, ρ^c , ρ^d

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Neka je A skup. **Particijom skupa** A zovemo skup $\{A_i : i \in I\}$ nepraznih podskupova od A takvih da vrijedi:

$$\mathbf{a} \quad \bigcup_{i \in I} A_i = A$$

$$\mathbf{b} \quad A_i \cap A_j = \emptyset \text{ ako je } i \neq j, \forall i, j \in I$$

Neka je ρ relacija ekvivalencije na skupu A . Za $a \in A$ **klasa ekvivalencije** $[a]_\rho$ elementa a s obzirom na relaciju ρ je skup

$$[a]_\rho = \{x \in A : x \rho a\}.$$

Jednostavnije rečeno, to su svi oni elementi koji su u relaciji ρ s elementom a . Element a (ili bilo koji drugi element iz $[a]_\rho$) zovemo **reprezentantom** te klase.

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$ $\bar{\rho}, \rho^c, \rho^d$

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Primjer 18.

Neka je A skup svih stanovnika Hrvatske. Neka je ρ relacija na skupu A definirana sa

$$\rho = \{(a, b) \in A^2 : a \text{ i } b \text{ stanuju u istoj županiji}\}.$$

Odredite klase ekvivalencije relacije ρ .

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$

$\bar{\rho}$, ρ^c , ρ^d

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Primjer 18.

Neka je A skup svih stanovnika Hrvatske. Neka je ρ relacija na skupu A definirana sa

$$\rho = \{(a, b) \in A^2 : a \text{ i } b \text{ stanuju u istoj županiji}\}.$$

Odredite klase ekvivalencije relacije ρ .

Rješenje.

Jasno je da je ρ relacija ekvivalencije. Klase ekvivalencije su županije. Npr., ako je $a \in A$ stanovnik Varaždinske županije, tada je $[a]_\rho$ skup svih stanovnika Varaždinske županije pa bismo kratko mogli nazvati klasu $[a]_\rho$ Varaždinskom županijom. Svaki stanovnik te županije je predstavnik te županije (odnosno te klase).

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$ $\bar{\rho}, \rho^c, \rho^d$

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$ $\bar{\rho}$, ρ^c , ρ^d

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Županijama (klasama ekvivalencije) je Hrvatska (skup) podijeljena na više manjih dijelova. Kako svake dvije različite županije nemaju ništa zajedničko, županije (klase ekvivalencije) zapravo čine jednu particiju Hrvatske (skupa).

Tako lijepo svojstvo vrijedi za bilo koju relaciju ekvivalencije, što ćemo uskoro i dokazati.

Neka je A skup, a ρ relacija ekvivalencije na skupu A .

Kvocijentni skup A/ρ od A s obzirom na relaciju ρ je skup svih klasa ekvivalencije relacije ρ .

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$

\bar{p} , ρ^c , ρ^d

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije



Propozicija 4.

Neka je ρ relacija ekvivalencije na skupu A . Tada je kvocijentni skup A/ρ particija skupa A .

Vrijedi i obrnuto.

Propozicija 5.

Svaka particija skupa A prirodno definira jednu relaciju ekvivalencije na skupu A .

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$

$\bar{\rho}, \rho^c, \rho^d$

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Parcijalni uređaj

Kao što relacija ekvivalencije poopćuje relaciju jednakosti, tako relacija parcijalnog uređaja poopćuje relaciju \leq .

Neka je $\preceq \subseteq A^2$. Relacija \preceq je relacija parcijalnog uređaja ako je

1 **refleksivna**, tj.

$$(\forall x \in A)(x \preceq x)$$

2 **antisimetrična**, tj.

$$(\forall x, y \in A)\left((x \preceq y \wedge y \preceq x) \Rightarrow x = y\right)$$

3 **tranzitivna**, tj.

$$(\forall x, y, z \in A)\left((x \preceq y \wedge y \preceq z) \Rightarrow x \preceq z\right)$$

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$

\bar{p}, ρ^c, ρ^d

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Skup zajedno sa parcijalnim uređajem zovemo **parcijalno uređen skup**.

- (\mathbb{R}, \leq) je parcijalno uređen skup

Refleksivnost. Za svaki realni broj x vrijedi $x \leq x$.

Antisimetričnost. Ako je $x \leq y$ i $y \leq x$, tada je $x = y$.

Tranzitivnost. Ako je $x \leq y$ i $y \leq z$, tada je $x \leq z$.

- $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ je parcijalno uređen skup

Refleksivnost. Za svaki skup X vrijedi $X \subseteq X$.

Antisimetričnost. Ako je $X \subseteq Y$ i $Y \subseteq X$, tada je $X = Y$.

Tranzitivnost. Ako je $X \subseteq Y$ i $Y \subseteq Z$, tada je $X \subseteq Z$.

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$

$\bar{\rho}, \rho^c, \rho^d$

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Primjer 19.

Da li je $(\mathbb{Z}, <)$ parcijalno uređen skup?

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$

\bar{p}, ρ^c, ρ^d

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Primjer 19.

Da li je $(\mathbb{Z}, <)$ parcijalno uređen skup?

Rješenje.

$(\mathbb{Z}, <)$ nije parcijalno uređen skup jer $<$ nije refleksivna relacija, tj. $x \not\prec x$.

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$

$\bar{\rho}, \rho^c, \rho^d$

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Primjer 19.

Da li je $(\mathbb{Z}, <)$ parcijalno uređen skup?

Rješenje.

$(\mathbb{Z}, <)$ nije parcijalno uređen skup jer $<$ nije refleksivna relacija, tj. $x \not\prec x$.

Podskupovi parcijalno uređenog skupa su također parcijalno uređeni skupovi preko relacije parcijalnog uređaja naslijeđene iz nadskupa.

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$

$\bar{\rho}, \rho^c, \rho^d$

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Parcijalni uređaj \preceq na skupu A je **linearni** ili **totalni uređaj** ako vrijedi

$$(\forall x, y \in A)(x \preceq y \vee y \preceq x).$$

Skup (A, \preceq) u tom slučaju zovemo **linearno uređen skup** ili **lanac**.

(\mathbb{R}, \leq) je linearno uređen skup

$(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ nije linearno uređen skup ako je $k(A) \geq 2$.

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$

\bar{p}, ρ^c, ρ^d

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Funkcije kao relacije

Relacija $f \subseteq A \times B$ je **funkcija** ako vrijedi

$$\forall a \in A, \exists! b \in B, (a, b) \in f.$$

f je **konstantna funkcija** ili **konstanta** ako

$$\exists! b \in B, \forall a \in A, (a, b) \in f.$$

Funkcija f je **injekcija** ako

$$\forall (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in f, a_1 \neq a_2 \Rightarrow b_1 \neq b_2.$$

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$

\bar{p}, ρ^c, ρ^d

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Funkcija $f \subseteq A \times B$ je **surjekcija** ako

$$\forall b \in B, \exists a \in A, (a, b) \in f.$$

Funkcija koja je istovremeno injekcija i surjekcija zovemo **bijekcijom**.

Neka je f bijekcija. **Inverzna funkcija** f^{-1} je obrat relacije f , tj. $f^{-1} = \bar{f}$.

Permutacija skupa A je svaka bijekcija na skupu A . Ako je A konačan skup, tada je $p : A \rightarrow A$ injekcija ako i samo ako je surjekcija.

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$

\bar{p}, ρ^c, ρ^d

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Svaka permutacija konačnog skupa može se prikazati na sljedeći način:

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p(1) & p(2) & \cdots & p(n) \end{pmatrix}$$

Svaki slučaj kad u permutaciji vrijedi

$$i < j \Rightarrow p(i) > p(j)$$

zovemo **inverzijom** u p . Označimo li sa $I(p)$ ukupan broj inverzija u p , tada definiramo funkciju sign sa

$$\text{sign} : S_n \rightarrow \{-1, 1\}, \quad \text{sign}(p) = (-1)^{I(p)},$$

gdje je sa S_n označen skup svih permutacija na n -članom skupu.

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$

\bar{p}, ρ^c, ρ^d

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Za permutaciju p kažemo da je **parna** ako je $\text{sign}(p) = 1$.

Za permutaciju p kažemo da je **neparna** ako je
 $\text{sign}(p) = -1$.

Primjer 20.

Odredite parnost permutacije $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$

\bar{p} , ρ^c , ρ^d

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije

Za permutaciju p kažemo da je **parna** ako je $\text{sign}(p) = 1$.

Za permutaciju p kažemo da je **neparna** ako je
 $\text{sign}(p) = -1$.

Primjer 20.

Odredite parnost permutacije $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

Rješenje.

$$1 < 2 \Rightarrow p(1) > p(2)$$

$$4 < 5 \Rightarrow p(4) > p(5)$$

Dakle, $I(p) = 2$, pa je $\text{sign}(p) = (-1)^2 = 1$. Stoga je p parna permutacija.

Skupovi i relacije

Zadavanje skupa

Skupovske relacije

Partitivni skup

Operacije sa skupovima

Svojstva operacija

Kartezijev produkt

Binarne relacije

Relacije na $A \times A$

\bar{p}, ρ^c, ρ^d

Svojstva bin. relacija

Relacija ekvivalencije

Parcijalni uređaj

Funkcije kao relacije