Matematika (PITUP)

Prof.dr.sc. Blaženka Divjak

FOI, Varaždin

Dio II

Matematička logika

"Bez obzira kako nam se neki teorem činio korektnim, ne možemo biti sigurni da ne krije neku nesavršenost sve dok se nam ne čini prekrasnim"
`G. Boole`

"The moving power of mathematical invention is not reasoning but imagination"
`A. De Morgan`

"Svaki dobar matematičar je barem upola filozof i svaki dobar filozof je barem upola matematičar"
`Friedrich Gottlob Frege`

Sadržaj

- **Matematička logika**
  - Uvod
  - Pojam suda
  - Operacije sa sudovima
  - Formule algebre sudova
  - Normalne forme
  - Minimizacija
  - NOR i NAND
  - Logički sklopovi
  - Predikati
  - Ograničavanje varijabli u predikatu

Uvod

Pojam logike
- specifično ljudsko razmišljanje
- znanost koja izučava zakonitosti u razmišljanju

Aristotel – prvi logičar u povijesti

Logičari su davno uočili da se pravila na kojima se temelji ispravno zaključivanje mogu formalizirati tako da ta formalizacija ima strogost matematičke teorije.

George Bool – u prvoj polovici 19. st. formalizirao pravila za zaključivanje

Logika

grč logos=riječ

Aristotel ("Organon")

- razvio logiku u prilično detalja
- opisao način razmišljanja od premise (pretpostavke) do zaključka i demonstrirao kako se postavljaju valjani koraci u tom procesu

George Boole(1815 – 1864)

– primjena skupa simbola na logičke operacije kako bi one sličile na algebru i na njih možemo onda primijeniti manipulacije kao u algebri i tako dobiti logičke rezultate (1847)

– nakon korespodencije s De Morganom objavio "On a general method of analysis"

– najznačajnije djelo "On investigation into the Laws of Thought, on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities" (1854)

3 osnovna tipa logike:

- **logika sudova**: "ako", "i", "ili", "ne"
- **kategorijalna logika**: "svi", "neki", "nijedan", "ne"
- **logika predikata**: logika sudova + kategorijalna logika

Modalna logika – proširenje logike predikata

Fuzzy logika – varijabla (sud) može poprimiti (osim istine i laži) više od dvije vrijednosti, a njezin razvoj ima veliko značenje za mogućnosti primjene računala u upravljanju tehnološkim procesima i za razvoj područja umjetne inteligencije

Pojam suda

Sud je izjava za koju se može jednoznačno odrediti da li je istinita ili lažna.

Primjer 1.

1. $4 + 7 = 10$

Pojam suda

Sud je izjava za koju se može jednoznačno odrediti da li je istinita ili lažna.

Primjer 1.

1. $4 + 7 = 10 \leftarrow$ *lažni sud*

Pojam suda

Sud je izjava za koju se može jednoznačno odrediti da li je istinita ili lažna.

Primjer 1.

1. $4 + 7 = 10 \leftarrow$ *lažni sud*
2. *8 je paran broj*

Pojam suda

Sud je izjava za koju se može jednoznačno odrediti da li je istinita ili lažna.

Primjer 1.

1. $4 + 7 = 10$ $\leftarrow$ *lažni sud*
2. *8 je paran broj* $\leftarrow$ *istiniti sud*

Pojam suda

Sud je izjava za koju se može jednoznačno odrediti da li je istinita ili lažna.

Primjer 1.

1. $4 + 7 = 10$ ← *lažni sud*
2. *8 je paran broj* ← *istiniti sud*
3. n *je višekratnik broja 100*

Pojam suda

Sud je izjava za koju se može jednoznačno odrediti da li je istinita ili lažna.

Primjer 1.

1. $4 + 7 = 10 \leftarrow$ *lažni sud*
2. *8 je paran broj* $\leftarrow$ *istiniti sud*
3. n *je višekratnik broja 100* $\leftarrow$ *to nije sud*

Pojam suda

Sud je izjava za koju se može jednoznačno odrediti da li je istinita ili lažna.

Primjer 1.

1. $4 + 7 = 10 \leftarrow$ *lažni sud*
2. *8 je paran broj* $\leftarrow$ *istiniti sud*
3. n *je višekratnik broja 100* $\leftarrow$ *to nije sud*
4. *24.12.2096. u Varaždinu će padati snijeg*

Pojam suda

Sud je izjava za koju se može jednoznačno odrediti da li je istinita ili lažna.

Primjer 1.

1. $4 + 7 = 10$ ← *lažni sud*
2. *8 je paran broj* ← *istiniti sud*
3. n *je višekratnik broja 100* ← *to nije sud*
4. *24.12.2096. u Varaždinu će padati snijeg* ← *to je sud, ali ne postoji način da utvrdimo da li je istinit ili ne*

Sudove ćemo označavati slovima, a za operacije algebre sudova koristit će se posebni simboli.

Za istiniti sud se koristi znak $\top$

Za lažni sud se koristi znak $\bot$

Uobičajeno je da se u algebri sudova istinitom sudu pridružuje vrijednost (valencija) 1, a lažnom 0.

$$x \text{ je lažan} \quad v(x) = 0$$
$$x \text{ je istinit} \quad v(x) = 1$$

Zbog jednostavnosti umjesto $v(x) = 0$ kratko pišemo $x = 0$, a umjesto $v(x) = 1$ kratko pišemo $x = 1$.

Tablica istinitosti ili **semantička tablica** – pomoću nje definiramo i proučavamo operacije algebre sudova, a u njoj se u prvom dijelu nalaze sve moguće kombinacije istinitosti sudova koji su uključeni u operaciju, a u preostalom dijelu se unose rezultati operacije za pojedinu kombinaciju istinitosti sudova

Operacije sa sudovima

- negiranje suda
- postupak povezivanja dva ili više suda u novi (složeni) sud pomoću veznika *i, ili, ako, onda,...*

Negacija

Negacija je unarna operacija jer djeluje na jedan objekt.

Oznaka za negaciju suda a je $\bar{a}$ ili $\neg a$.

Negacija suda a je sud $\bar{a}$ koji je istinit jedino ako je sud a lažan.

Tablica istinitosti za negaciju:

a	$\bar{a}$
1	0
0	1

Primjer 2.

Negirajte sud $a =$ "$x < 5$".

Tablica istinitosti za negaciju:

a	$\bar{a}$
1	0
0	1

Primjer 2.

Negirajte sud $a =$ "$x < 5$".

Rješenje.

$\bar{a} =$ "$x \geqslant 5$"

Konjunkcija

Konjunkcija je operacija između dva suda. Oznaka za ovu operaciju je $\wedge$ i ona odgovara vezniku "i".

Konjunkcija sudova a i b je sud $a \wedge b$ koji je istinit jedino ako su oba suda a i b istinita.

Tablica istinitosti za konjunkciju:

a	b	$a \wedge b$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Disjunkcija

Disjunkcija je operacija između dva suda. Oznaka za ovu operaciju je $\vee$ i ona odgovara vezniku "ili".

Disjunkcija sudova a i b je sud $a \vee b$ koji je lažan jedino ako su oba suda a i b lažna.

Tablica istinitosti za disjunkciju:

a	b	$a \vee b$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Napomena.

Poznato je da veznik "ili" ima dvije semantičke interpretacije u složenim rečenicama: razlikuju se **inkluzivno ili** i **ekskluzivno ili**. Disjunkcija odgovara inkluzivnom ili.

Primjer 3 (inkluzivno ili).

"Za dobivanje potpisa iz Matematike I treba skupiti više od 20 bodova ili redovito ići na vježbe i predavanja" (obje su mogućnosti dozvoljene, tj. ako netko zadovolji i jedno i drugo isto će dobiti potpis)

Primjer 4 (ekskluzivno ili).

"Položit ćeš taj ispit ili ćeš prestati studirati"

Operaciju između dva suda koja odgovara ekskluzivnom ili označavamo sa $\veebar$

Tablica istinitosti za tu operaciju je

a	b	$a \veebar b$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Negacija, konjunkcija i disjunkcija su osnovne operacije među sudovima.

Svojstva osnovnih operacija algebre sudova

- $a \wedge b = b \wedge a,$ (komutativnost)
- $a \vee b = b \vee a,$ (komutativnost)
- $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c),$ (asocijativnost)
- $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c),$ (asocijativnost)
- $\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b,$ (De Morganov zakon)
- $\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b,$ (De Morganov zakon)
- $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c),$ (distributivnost)
- $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c),$ (distributivnost)

- $a \wedge a = a,$ (idempotentnost za konjunkciju)
- $a \vee a = a,$ (idempotentnost za disjunkciju)
- $\neg(\neg a) = a,$ (zakon involucije)
- $a \wedge 0 = 0,$
- $a \vee 1 = 1,$

Navedena svojstva dokazuju se pomoću tablica istinitosti.

Primjer 5.

Dokažite da vrijedi $\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$.

Primjer 5.

Dokažite da vrijedi $\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$.

Rješenje.

Treba dokazati da sudovi $\neg(a \wedge b)$ i $\neg a \vee \neg b$ imaju iste tablice istinitosti.

a	b	$a \wedge b$	$\neg(a \wedge b)$	$\neg a$	$\neg b$	$\neg a \vee \neg b$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1

Implikacija

Implikacija se koristi da bi se izrazila uzročno-posljedična veza između dva suda.

Implikacija sudova a i b je sud $a \Rightarrow b$ koji je lažan jedino ako je sud a istinit, a sud b lažan.

Tablica istinitosti za implikaciju:

a	b	$a \Rightarrow b$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Primjer 6.

Odredite istinitost sljedećih implikacija:

(a) $-1 \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow 2 + 2 = 5$

(b) $4^2 = 16 \Rightarrow (-1)^2 = -1$

Primjer 6.

Odredite istinitost sljedećih implikacija:

(a) $-1 \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow 2+2=5$

(b) $4^2 = 16 \Rightarrow (-1)^2 = -1$

Rješenje.

(a) Implikacija je istinita $(0 \Rightarrow 0)$

Primjer 6.

Odredite istinitost sljedećih implikacija:

(a) $-1 \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow 2+2=5$

(b) $4^2 = 16 \Rightarrow (-1)^2 = -1$

Rješenje.

(a) Implikacija je istinita $(0 \Rightarrow 0)$

(b) Implikacija je lažna $(1 \Rightarrow 0)$

Primjer 6.

Odredite istinitost sljedećih implikacija:

(a) $-1 \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow 2+2=5$

(b) $4^2 = 16 \Rightarrow (-1)^2 = -1$

Rješenje.

(a) Implikacija je istinita $(0 \Rightarrow 0)$

(b) Implikacija je lažna $(1 \Rightarrow 0)$

Zadatak 1.

Da li za implikaciju vrijedi komutativnost?

Primjer 7.

Prikažite implikaciju pomoću osnovnih operacija.

Primjer 7.

Prikažite implikaciju pomoću osnovnih operacija.

Rješenje.

$$\boxed{a \Rightarrow b = \bar{a} \vee b}$$

a	b	$a \Rightarrow b$	$\bar{a}$	$\bar{a} \vee b$
1	1	1	0	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

Izraz $a \Rightarrow b$ čita se ”a povlači b”, ”a implicira b”, ”iz a slijedi b”, ”ako je a tada je b”, ”b je nužan uvjet za a”, ”b proizlazi iz a”, ”b je logička posljedica od a”.

$$a \Rightarrow b$$

pretpostavka	posljedica
premisa	konkluzija
hipoteza	teza
antecedenta	konzekventa

U matematici je za implikaciju $a \Rightarrow b$ uobičajen naziv **teorem**.

$a \Rightarrow b$	teorem
$b \Rightarrow a$	obrat teorema
$\bar{a} \Rightarrow \bar{b}$	suprotan teorem
$\bar{b} \Rightarrow \bar{a}$	obrat suprotnog teorema (kontrapozicija)

a	b	$a \Rightarrow b$	$b \Rightarrow a$	$\bar{a} \Rightarrow \bar{b}$	$\bar{b} \Rightarrow \bar{a}$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1

Iz tablice vidimo da se istinitost teorema podudara s istinitošću kontrapozicije teorema, a obrnuti teorem je po istinitosti jednak suprotnom teoremu.

$$\boxed{a \Rightarrow b \;=\; \bar{b} \Rightarrow \bar{a}}$$

Primjer 8.

Zadani su sudovi $A =$ *"Četverokut je pravokutnik" i* $B =$ *"Četverokut ima dijagonale jednakih duljina". Od njih se može napraviti implikacija* $A \Rightarrow B =$ *"Ako je četverokut pravokutnik, onda on ima dijagonale jednakih duljina". Napišite obrat ovog teorema, suprotan teorem i kontrapoziciju. Analizirajte njihove istinitosti i navedite geometrijski lik koji pokazuje da obrat teorema i suprotan teorem nisu istiniti.*

Rješenje.

Teorem

$A \Rightarrow B =$ "Ako je četverokut pravokutnik, onda on ima dijagonale jednakih duljina"

Obrat teorema

Rješenje.

Teorem

$A \Rightarrow B =$ "Ako je četverokut pravokutnik, onda on ima dijagonale jednakih duljina"

Obrat teorema

$B \Rightarrow A =$ "Ako četverokut ima dijagonale jednakih duljina, onda je on pravokutnik"

Suprotan teorem

Rješenje.

Teorem

$A \Rightarrow B =$ "Ako je četverokut pravokutnik, onda on ima dijagonale jednakih duljina"

Obrat teorema

$B \Rightarrow A =$ "Ako četverokut ima dijagonale jednakih duljina, onda je on pravokutnik"

Suprotan teorem

$\overline{A} \Rightarrow \overline{B} =$ "Ako četverokut nije pravokutnik, onda on ima dijagonale različitih duljina"

Kontrapozicija

Rješenje.

Teorem

$A \Rightarrow B =$ "Ako je četverokut pravokutnik, onda on ima dijagonale jednakih duljina"

Obrat teorema

$B \Rightarrow A =$ "Ako četverokut ima dijagonale jednakih duljina, onda je on pravokutnik"

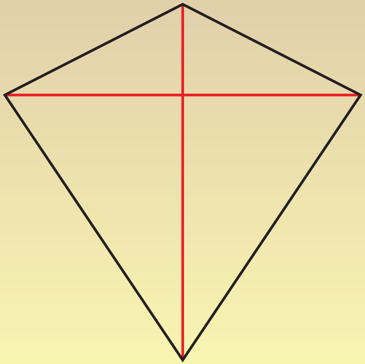
Suprotan teorem

$\overline{A} \Rightarrow \overline{B} =$ "Ako četverokut nije pravokutnik, onda on ima dijagonale različitih duljina"

Kontrapozicija

$\overline{B} \Rightarrow \overline{A} =$ "Ako četverokut ima dijagonale različitih duljina, onda on nije pravokutnik"

$A \Rightarrow B$ je istinita tvrdnja, pa je onda i $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ istinita tvrdnja. $B \Rightarrow A$ i $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$ nisu istinite tvrdnje, jer deltoid može imati dijagonale jednakih duljina.



Ekvivalencija

U matematici se ekvivalencija javlja u dva vida: kao relacija (odnos) među nekim objektima koja ima određena svojstva i kao posebna logička operacija.

Ekvivalencija sudova a i b je sud $a \Leftrightarrow b$ koji je istinit ako su oba suda a i b istinita ili ako su oba suda a i b lažna.

Tablica istinitosti za ekvivalenciju:

a	b	$a \Leftrightarrow b$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Zadatak 2.

(a) *Dokažite da vrijedi*

$$a \Leftrightarrow b = (a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$$

(b) *Da li vrijedi komutativnost ekvivalencije?*

(c) *Prikažite ekvivalenciju pomoću osnovnih operacija.*

Formule algebre sudova

Formula algebre sudova je svaki niz znakova varijabli algebre sudova (sudovi), konstanti algebre sudova (0,1) i operacija algebre sudova pri čijem formiranju su zadovoljena sljedeća pravila

1. znakovi za varijable algebre sudova su formule,
2. ako su x, y formule tada su formule i

$$\bar{x}, \quad \bar{y}, \quad x \wedge y, \quad x \vee y, \quad x \Rightarrow y, \quad y \Rightarrow x, \quad x \Leftrightarrow y,$$

3. svaka formula može se dobiti konačnim brojem primjena prethodnih pravila.

Primjer 9.

1. *Jesu formule algebre sudova:*

$$(x \vee \bar{y}) \Rightarrow z, \quad (x \wedge (x \Leftrightarrow y)) \vee (z \Rightarrow w)$$

2. *Nisu formule algebre sudova:*

$$x\vee \Rightarrow z, \quad (y\wedge)z \Rightarrow x, \quad x \vee (y \Rightarrow \bar{z}))$$

Svakoj formuli algebre sudova možemo pridružiti semantičku tablicu čiju veličinu (broj redova) određuje broj različitih sudova koji se javljaju u formuli. Ako imamo n sudova u formuli, tada semantička tablica ima 2^n redaka.

Primjer 10.

Napravite semantičku tablicu za formulu

$$F = ((a \Rightarrow b) \vee c) \Leftrightarrow (\bar{b} \wedge c).$$

Primjer 10.

Napravite semantičku tablicu za formulu

$$F = ((a \Rightarrow b) \vee c) \Leftrightarrow (\bar{b} \wedge c).$$

Rješenje.

a	b	c	$a \Rightarrow b$	$(a \Rightarrow b) \vee c$	$\bar{b}$	$\bar{b} \wedge c$	F
1	1	1	1	1	0	0	0
1	1	0	1	1	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	0	0

Za dvije formule kažemo da su **semantički** ili **logički ekvivalentne** ako im se podudaraju logičke vrijednosti u semantičkim tablicama.

Tautologija je formula koja uvijek daje istinu. Najjednostavnija tautologija je $x \vee \bar{x}$.

Kontradikcija ili **antitautologija** je formula koja uvijek daje laž. Najjejdnostavniji primjer kontradikcije je $x \wedge \bar{x}$.

Neki primjeri tautologija

- $a \Rightarrow (a \vee b)$ (dodavanje)
- $(a \wedge b) \Rightarrow a$ (pojednostavljenje)
- $(a \wedge (a \Rightarrow b)) \Rightarrow b$ (modus ponens)
- $((a \Rightarrow b) \wedge \bar{b}) \Rightarrow \bar{a}$ (modus tolens)
- $(\bar{a} \wedge (a \vee b)) \Rightarrow b$ (disjunktivni silogizam)
- $((a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c)) \Rightarrow (a \Rightarrow c)$ (hipotetički silogizam)

Primjer 11.

Dokažite da je $a \Rightarrow (a \vee b)$ *tautologija.*

Primjer 11.

Dokažite da je $a \Rightarrow (a \vee b)$ tautologija.

Rješenje.

a	b	$a \vee b$	$a \Rightarrow (a \vee b)$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	1

Primjer 11.

Dokažite da je $a \Rightarrow (a \vee b)$ *tautologija.*

Rješenje.

a	b	$a \vee b$	$a \Rightarrow (a \vee b)$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	1

Zadatak 3.

Dokažite da su preostali navedeni primjeri tautologija zaista tautologije.

Funkcija algebre sudova je svako preslikavanje sa skupa sudova i konstanti algebre sudova u dvočlani skup $\{0, 1\}$.

Svakom formulom algebre sudova određena je funkcija algebre sudova. Ista funkcija algebre sudova može se zadati različitim formulama. Preciznije, logički ekvivalentne formule određuju istu funkciju algebre sudova.

Primjer 12.

Koliko ima funkcija algebre sudova od n sudova?

Primjer 12.

Koliko ima funkcija algebre sudova od n sudova?

Rješenje.

Kako svaki od tih sudova može poprimiti vrijednost 0 ili 1, domenu ove funkcije određuju sve varijacije s ponavljanjem od 2 elementa. Dakle, domena te funkcije ima 2^n elemenata. Kako se svaki element domene može preslikati u 0 ili 1, slijedi da je ukupni broj funkcija 2^{2^n}.

Napomena.

Očito je da je broj formula koje se mogu formirati od n sudova nije konačan, no broj funkcija algebre sudova od n sudova je konačan i jednak 2^{2^n}. Zašto je tome tako? Naime, mnoge od tih formula su logički ekvivalentne pa određuju istu funkciju algebre sudova. To što je broj funkcija algebre sudova od n sudova jednak 2^{2^n}, znači da tih beskonačno mnogo formula od n sudova možemo podijeliti na 2^{2^n} dijelova tako da se svaka formula nalazi u samo jednom od tih dijelova, da su svake dvije formule iz istog dijela međusobno logički ekvivalentne, a svake dvije formule iz različitih dijelova su međusobno logički neekvivalentne.

Svaki od tih dijelova zovemo klasom, a unija tih 2^{2^n} klasa daje sve formule algebre sudova od n sudova. Svake dvije klase nemaju ništa zajedničko.

Osim formulom, svaka funkcija algebre sudova može se zadati i semantičkom tablicom. Jasno je da ako je funkcija zadana formulom, njoj se može na jedinstveni način pridružiti semantička tablica. Ako je funkcija zadana tablicom, postavlja se pitanje reprezentacije takve funkcije formulom. Naime postoji čitava jedna klasa tih formula (od onih 2^{2^n} klasa) koja reprezentira tu funkciju.

Što je naša sljedeća velika želja?

Što je naša sljedeća velika želja?

Želimo iz te klase formula koje reprezentiraju tu funkciju izdvojiti neke "lijepe" formule. Preciznije, pokazuje se da se iz svake od tih klasa mogu izdvojiti dvije formule u kojima se koriste samo osnovne operacije algebre sudova (negacija, konjunkcija, disjunkcija) koje zovemo **normalne forme**. Prema tome, svake dvije logički ekvivalentne formule imaju iste normalne forme.

Normalne forme

Neka je $F(x, y, z, \ldots)$ funkcija algebre sudova. Svaka konjunkcija $k_i(x, \bar{x}, y, \bar{y}, z, \bar{z}, \ldots)$ sudova ili njihovih negacija koja ima svojstvo $F(\ldots) = 1$ kada je $k_i(\ldots) = 1$ zove se **bazična konjunkcija** zadane funkcije F.

Primjer 13.

Provjerite da li su konjunkcije $k_1 = x \wedge y \wedge z$ *i* $k_2 = x \wedge \bar{y} \wedge z$ *bazične konjunkcije funkcije* $F(x, y, z) = ((x \vee y) \wedge z) \Leftrightarrow \overline{x \wedge \bar{y}}$.

Rješenje.

Neka je $k_1 = 1$. Da bi to vrijedilo, sudovi u toj konjunkciji moraju imati vrijednosti $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$. Sada je $F(1,1,1) = ((1 \vee 1) \wedge 1) \Leftrightarrow \overline{1 \wedge 0} = 1$. Dakle, k_1 je bazična konjunkcija zadane funkcije.

Ako je $k_2 = 1$, tada mora biti $x = 1$, $\bar{y} = 1$, $z = 1$. No, kako je $F(1,0,1) = 0$, slijedi da k_2 nije bazična konjunkcija od F.

Određivanje bazičnih konjunkcija

1. Formiramo semantičku tablicu za zadanu funkciju
2. Za svaki red u kojem je u stupcu funkcijskih vrijednosti vrijednost 1 formiramo konjunkciju koja sadrži sudove ili njihove negacije tako da ta konjunkcija ima također vrijednost 1

Disjunktivna normalna forma neke funkcije algebre sudova je disjunkcija svih njezinih bazičnih konjunkcija.

Primjer 14.

Odredite disjunktivnu normalnu formu funkcije

$$F(x,y,z) = ((x \vee y) \wedge z) \Leftrightarrow \overline{x \wedge \bar{y}}.$$

Primjer 14.

Odredite disjunktivnu normalnu formu funkcije

$F(x, y, z) = ((x \vee y) \wedge z) \Leftrightarrow \overline{x \wedge \bar{y}}$.

Rješenje.

x	y	z	F	bazične konjunkcije
1	1	1	1	$x \wedge y \wedge z$
1	1	0	0	
1	0	1	0	
1	0	0	1	$x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}$
0	1	1	1	$\bar{x} \wedge y \wedge z$
0	1	0	0	
0	0	1	0	
0	0	0	0	

Disjunktivna normalna forma funkcije F je

$$DNF(F) = (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z)$$

Neka je $F(x, y, z, \ldots)$ funkcija algebre sudova. Svaka disjunkcija $d_i(x, \bar{x}, y, \bar{y}, z, \bar{z}, \ldots)$ sudova ili njihovih negacija koja ima svojstvo $F(\ldots) = 0$ kada je $d_i(\ldots) = 0$ zove se **bazična disjunkcija** zadane funkcije F.

Primjer 15.

Da li su disjunkcije $d_1 = x \vee \bar{y} \vee \bar{z}$ *i* $d_2 = x \vee y \vee \bar{z}$ *bazične disjunkcije funkcije* $F(x, y, z) = ((x \vee y) \wedge z) \Leftrightarrow \overline{x \wedge \bar{y}}$*?*

Primjer 15.

Da li su disjunkcije $d_1 = x \vee \bar{y} \vee \bar{z}$ *i* $d_2 = x \vee y \vee \bar{z}$ *bazične disjunkcije funkcije* $F(x, y, z) = ((x \vee y) \wedge z) \Leftrightarrow \overline{x \wedge \bar{y}}$*?*

Rješenje.

Ako je $d_1 = 0$, tada mora biti $x = 0$, $y = 1$, $z = 1$. Kako je $F(0, 1, 1) = ((0 \vee 1) \wedge 1) \Leftrightarrow \overline{0 \wedge \bar{1}} = 1 \Leftrightarrow 1 = 1$, slijedi da d_1 nije bazična disjunkcija od F.

Ako je $d_2 = 0$, tada mora biti $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$. Kako je $F(0, 0, 1) = ((0 \vee 0) \wedge 1) \Leftrightarrow \overline{0 \wedge \bar{0}} = 0 \Leftrightarrow 1 = 0$, slijedi da je d_2 bazična disjunkcija od F.

Određivanje bazičnih disjunkcija

1. Formiramo semantičku tablicu za zadanu funkciju
2. Za svaki red u kojem je u stupcu funkcijskih vrijednosti vrijednost 0 formiramo disjunkciju koja sadrži sudove ili njihove negacije tako da ta disjunkcija ima također vrijednost 0

Konjunktivna normalna forma neke funkcije algebre sudova je konjunkcija svih njezinih bazičnih disjunkcija.

Primjer 16.

Odredite konjunktivnu normalnu formu funkcije

$$F(x, y, z) = ((x \vee y) \wedge z) \Leftrightarrow \overline{x \wedge \bar{y}}.$$

Primjer 16.

Odredite konjunktivnu normalnu formu funkcije

$$F(x, y, z) = ((x \vee y) \wedge z) \Leftrightarrow \overline{x \wedge \bar{y}}.$$

Rješenje.

x	y	z	F	bazične disjunkcije
1	1	1	1	
1	1	0	0	$\bar{x} \vee \bar{y} \vee z$
1	0	1	0	$\bar{x} \vee y \vee \bar{z}$
1	0	0	1	
0	1	1	1	
0	1	0	0	$x \vee \bar{y} \vee z$
0	0	1	0	$x \vee y \vee \bar{z}$
0	0	0	0	$x \vee y \vee z$

Konjunktivna normalna forma funkcije F je

$$KNF(F) = (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \wedge (x \vee \bar{y} \vee z) \wedge$$
$$\wedge (x \vee y \vee \bar{z}) \wedge (x \vee y \vee z)$$

$$F(x,y,z) = ((x \vee y) \wedge z) \Leftrightarrow \overline{x \wedge \bar{y}}$$

x	y	z	F	bazične disjunkcije	bazične konjunkcije
1	1	1	1		$x \wedge y \wedge z$
1	1	0	0	$\bar{x} \vee \bar{y} \vee z$	
1	0	1	0	$\bar{x} \vee y \vee \bar{z}$	
1	0	0	1		$x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}$
0	1	1	1		$\bar{x} \wedge y \wedge z$
0	1	0	0	$x \vee \bar{y} \vee z$	
0	0	1	0	$x \vee y \vee \bar{z}$	
0	0	0	0	$x \vee y \vee z$	

$$DNF(F) = (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z)$$

$$KNF(F) = (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \wedge (x \vee \bar{y} \vee z) \wedge$$
$$\wedge (x \vee y \vee \bar{z}) \wedge (x \vee y \vee z)$$

Minimizacija

Minimizacija formule algebre sudova je postupak kojim se od formule algebre sudova u kojoj se pojavljuju osnovne i složene operacije algebre sudova dobije logički ekvivalentna i što jednostavnija formula u kojoj se koriste samo osnovne operacije.

Vidjeli smo da je svaka formula algebre sudova logički ekvivalentna sa svojom konjunktivnom i disjunktivnom normalnom formom u kojima se pojavljuju samo osnovne operacije algebre sudova. No, te normalne forme mogu biti "dugačke" pa ih u tom slučaju želimo na neki način pojednostavniti.

Minimizacija se može provesti na dva načina:

1. analitički (algebarski) – postupak se temelji na primjeni svojstava operacija algebre sudova
2. grafički (Vejčova metoda, Karnoughov graf) – osnova ove metode je korespodencija skupovskih i logičkih operacija

Napomena.

Postoje i drugi postupci minimizacije koji su formalniji, ali mi ovdje u takve postupke nećemo ulaziti. Nadalje, gornja dva postupka minimizacije koje ćemo opisati općenito neće dati najbolju moguću minimizaciju (kao neki drugi formalniji postupci), ali za naše potrebe će to biti dovoljno.

◂ Svojstva osnovnih operacija algebre sudova

Primjer 17.

Koristeći svojstva logičkih operacija pojednostavnite formulu $F(x,y,z) = (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z})$.

Primjer 17.

Koristeći svojstva logičkih operacija pojednostavnite formulu $F(x,y,z) = (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z})$.

Rješenje.

$$(x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) =$$

Primjer 17.

Koristeći svojstva logičkih operacija pojednostavnite formulu $F(x,y,z) = (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z})$.

Rješenje.

$$(x \wedge y \wedge z) \vee ({\color{red}x \wedge \bar{y}} \wedge z) \vee ({\color{red}x \wedge \bar{y}} \wedge \bar{z}) =$$

$$= (\text{distributivnost}) = (x \wedge y \wedge z) \vee \Big(({\color{red}x \wedge \bar{y}}) \wedge (z \vee \bar{z})\Big) =$$

Svojstva osnovnih operacija algebre sudova

Primjer 17.

Koristeći svojstva logičkih operacija pojednostavnite formulu $F(x,y,z) = (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z})$.

Rješenje.

$$(x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) =$$

$$= (\text{distributivnost}) = (x \wedge y \wedge z) \vee \Big((x \wedge \bar{y}) \wedge (z \vee \bar{z})\Big) =$$

$$= (x \wedge y \wedge z) \vee ((x \wedge \bar{y}) \wedge 1) =$$

Primjer 17.

Koristeći svojstva logičkih operacija pojednostavnite formulu $F(x,y,z) = (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z})$.

Rješenje.

$$(x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) =$$

$$= (\text{distributivnost}) = (x \wedge y \wedge z) \vee \Big((x \wedge \bar{y}) \wedge (z \vee \bar{z})\Big) =$$

$$= (x \wedge y \wedge z) \vee ((x \wedge \bar{y}) \wedge 1) = (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y}) =$$

◂ Svojstva osnovnih operacija algebre sudova

Primjer 17.

Koristeći svojstva logičkih operacija pojednostavnite formulu $F(x,y,z)=(x\wedge y\wedge z)\vee(x\wedge\bar{y}\wedge z)\vee(x\wedge\bar{y}\wedge\bar{z})$.

Rješenje.

$$(x\wedge y\wedge z)\vee(x\wedge\bar{y}\wedge z)\vee(x\wedge\bar{y}\wedge\bar{z})=$$

$$=(\text{distributivnost})=(x\wedge y\wedge z)\vee\Big((x\wedge\bar{y})\wedge(z\vee\bar{z})\Big)=$$

$$=(x\wedge y\wedge z)\vee((x\wedge\bar{y})\wedge 1)=(x\wedge y\wedge z)\vee(x\wedge\bar{y})=$$

$$=(\text{distributivnost})=x\wedge\Big((y\wedge z)\vee\bar{y}\Big)=$$

Primjer 17.

Koristeći svojstva logičkih operacija pojednostavnite formulu $F(x,y,z) = (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z})$.

Rješenje.

$$(x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) =$$

$$= (\text{distributivnost}) = (x \wedge y \wedge z) \vee \Big((x \wedge \bar{y}) \wedge (z \vee \bar{z})\Big) =$$

$$= (x \wedge y \wedge z) \vee ((x \wedge \bar{y}) \wedge 1) = (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y}) =$$

$$= (\text{distributivnost}) = x \wedge \Big((y \wedge z) \vee \bar{y}\Big) =$$

$$= (\text{distributivnost}) = x \wedge \Big((y \vee \bar{y}) \wedge (z \vee \bar{y})\Big) =$$

Primjer 17.

Koristeći svojstva logičkih operacija pojednostavnite formulu $F(x,y,z) = (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z})$.

Rješenje.

$$(x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) =$$

$$= (\text{distributivnost}) = (x \wedge y \wedge z) \vee \Big((x \wedge \bar{y}) \wedge (z \vee \bar{z})\Big) =$$

$$= (x \wedge y \wedge z) \vee ((x \wedge \bar{y}) \wedge 1) = (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y}) =$$

$$= (\text{distributivnost}) = x \wedge \Big((y \wedge z) \vee \bar{y}\Big) =$$

$$= (\text{distributivnost}) = x \wedge \Big((y \vee \bar{y}) \wedge (z \vee \bar{y})\Big) =$$

$$= x \wedge (1 \wedge (z \vee \bar{y}))$$

Primjer 17.

Koristeći svojstva logičkih operacija pojednostavnite formulu $F(x,y,z) = (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z})$.

Rješenje.

$$(x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) =$$

$$= (\text{distributivnost}) = (x \wedge y \wedge z) \vee \Big((x \wedge \bar{y}) \wedge (z \vee \bar{z}) \Big) =$$

$$= (x \wedge y \wedge z) \vee ((x \wedge \bar{y}) \wedge 1) = (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y}) =$$

$$= (\text{distributivnost}) = x \wedge \Big((y \wedge z) \vee \bar{y} \Big) =$$

$$= (\text{distributivnost}) = x \wedge \Big((y \vee \bar{y}) \wedge (z \vee \bar{y}) \Big) =$$

$$= x \wedge (1 \wedge (z \vee \bar{y})) = x \wedge (\bar{y} \vee z)$$

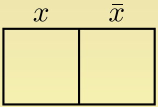
Vejčova metoda

Ova metoda se koristi za minimizaciju disjunktivne normalne forme funkcije algebre sudova. Temelji se na korespodenciji skupovskih i logičkih operacija i na grafičkom prikazu skupa koji odgovara formuli koja se minimizira. Korespodencija na kojoj se temelji ova metoda je sljedeća:

$$\begin{array}{rcl} \text{negacija} & \leftrightarrow & \text{komplement} \\ \text{disjunkcija} & \leftrightarrow & \text{unija} \\ \text{konjunkcija} & \leftrightarrow & \text{presjek} \end{array}$$

Ovisno o broju sudova skicira se dijagram u kojem se odredi dio ravnine koji pripada disjunktivnoj normalnoj formi koja se minimizira. Zatim se na temelju navedene korespodencije tom dijelu ravnine pridružuje što jednostavnija formula iz teorije skupova koja nju određuje.

Ako formula sadrži samo jedan sud, dijagram izgleda ovako



Ako formula sadrži dva suda, dijagram izgleda ovako

	x	$\bar{x}$
y	1	2
$\bar{y}$	3	4

Površine unutar tog dijagrama možemo izraziti pomoću skupovskih operacija, a njima se onda pridružuju odgovarajuće konjunkcije.

Površina	1	2	3	4
Formula (skupovska)	$x \cap y$	$\bar{x} \cap y$	$x \cap \bar{y}$	$\bar{x} \cap \bar{y}$
Formula (logička)	$x \wedge y$	$\bar{x} \wedge y$	$x \wedge \bar{y}$	$\bar{x} \wedge \bar{y}$

Ako formula sadrži tri suda, dijagram izgleda ovako

	x		$\bar{x}$	
y	1	2	3	4
$\bar{y}$	5	6	7	8
	$\bar{z}$	z		$\bar{z}$

Površina	Formula (skupovska)	Formula (logička)
1	$x \cap y \cap \bar{z}$	$x \wedge y \wedge \bar{z}$
2	$x \cap y \cap z$	$x \wedge y \wedge z$
3	$\bar{x} \cap y \cap z$	$\bar{x} \wedge y \wedge z$
4	$\bar{x} \cap y \cap \bar{z}$	$\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}$
5	$x \cap \bar{y} \cap \bar{z}$	$x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}$
6	$x \cap \bar{y} \cap z$	$x \wedge \bar{y} \wedge z$
7	$\bar{x} \cap \bar{y} \cap z$	$\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z$
8	$\bar{x} \cap \bar{y} \cap \bar{z}$	$\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}$

Primjer 18.

Minimizirajte funkciju $F(x, y, z) = ((x \vee y) \wedge z) \Leftrightarrow \overline{x \wedge \bar{y}}$ *Vejčovom metodom.*

Primjer 18.

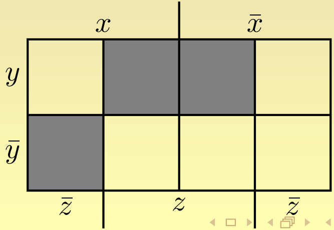
Minimizirajte funkciju $F(x, y, z) = ((x \vee y) \wedge z) \Leftrightarrow \overline{x \wedge \bar{y}}$ *Vejčovom metodom.*

Rješenje.

Sjetimo se da je disjunktivna normalna forma zadane funkcije DNF(F)

$$DNF(F) = (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z)$$

Njoj pridružujemo površinu označenu na slici.



Ovu površinu jednostavnije možemo izraziti kao

$$(y \cap z) \cup (x \cap \bar{y} \cap \bar{z}),$$

pa je minimizacija zadane funkcije F jednaka

$$F_{\text{min}} = (y \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}).$$

Uočimo da disjunktivna normalna forma funkcije F sadrži 11 osnovnih operacija, a minimizirana formula sadrži 6 osnovnih operacija. Dakle, ovdje smo broj osnovnih operacija takoreći smanjili za pola.

NOR i NAND

Do sada smo upoznali tri osnovne operacije algebre sudova (negacija, konjunkcija i disjunkcija) i dvije složene operacije (implikacija i ekvivalencija).

Ako binarne operacije algebre sudova promatramo kao funkcije dviju varijabli, tada postoji $2^{2^2} = 16$ takvih funkcija. Među njima izdvojit ćemo još dvije takve operacije: NOR ("ne ili") i NAND ("ne i").

NOR operator (Peirce-ova strelica)

a	b	$a \downarrow b$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

NAND operator (Sheffer-ova operacija)

a	b	$a \nearrow b$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

$$\bar{x} = x \downarrow x$$

$$x \vee y = (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y)$$

$$x \wedge y = (x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)$$

$$\bar{x} = x \nearrow x$$

$$x \vee y = (x \nearrow x) \nearrow (y \nearrow y)$$

$$x \wedge y = (x \nearrow y) \nearrow (x \nearrow y)$$

Zadatak 4.

Dokažite da vrijede gornje jednakosti.

Zadatak 5.

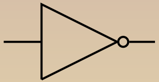
Provjerite da li su NOR i NAND asocijativne operacije.

Logički sklopovi

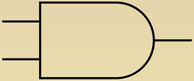
Ideja je da se svakoj operaciji algebre sudova pridružuje jedan električni sklop koji sadrži toliko prekidača koliko sudova sadrži ta operacija. Svakom sudu pridružuje se jedan prekidač. Svaki prekidač ima dva stanja koja se interpretiraju kao 0 i 1. Ukoliko je prekidač u stanju 0, smatra se da on ne "propušta" struju, a ako je u stanju 1, tada propušta struju. Realizirati određenu funkciju algebre sudova znači dizajnirati tako povezan skup prekidača koji će na izlazu "davati struju" ukoliko za vrijednosti sudova pridruženih stanjima prekidača funkcija ima vrijednost 1.

Logički sklopovi osnovnih operacija

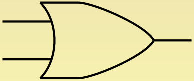
"ne" sklop



"i" sklop



"ili" sklop



Primjer 19.

Nacrtajte logički element za funkciju

$$F(x,y,z) = ((x \vee y) \wedge z) \Leftrightarrow \overline{x \wedge \bar{y}}.$$

Primjer 19.

Nacrtajte logički element za funkciju

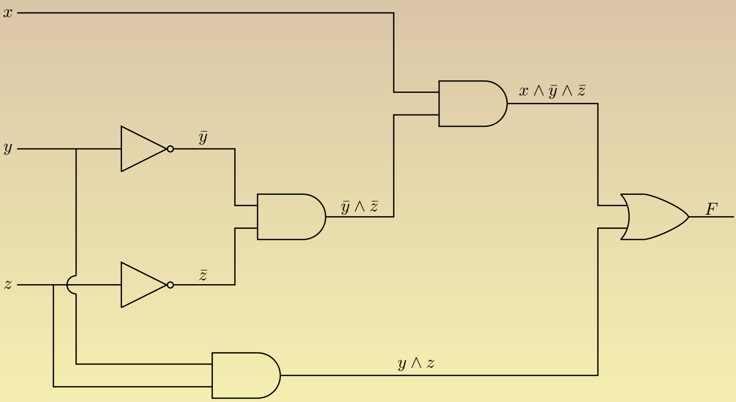
$$F(x, y, z) = ((x \vee y) \wedge z) \Leftrightarrow \overline{x \wedge \bar{y}}.$$

Rješenje.

Već smo prije minimizirali F. F_{min}

$$F_{\text{min}} = (y \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z})$$

Kada treba nacrtati logički element od F, tada zapravo treba nacrtati logički element od F_{min} tako da taj logički element bude što jednostavniji.


x
y
z
$\bar{y}$
$\bar{z}$
$x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}$
$\bar{y} \wedge \bar{z}$
$y \wedge z$
F

Predikati

Sudovi nisu dovoljni za izricanje svih tipova tvrdnji u matematici. Osim sudova u matematici se koriste i drugi tipovi rečenica. Struktura tih rečenica je takva da one sadrže subjekt (elemente nekog skupa) i predikat (svojstvo koje se pridružuje navedenom elementu, odnosno elementima). Zbog toga se takve rečenice zovu **predikati**.

Primjer 20.

Koje su od sljedećih izjava sudovi?

- "Dva plus tri jednako je pet"

Primjer 20.

Koje su od sljedećih izjava sudovi?

- "Dva plus tri jednako je pet" $\longleftarrow$ To je istinit sud

Primjer 20.

Koje su od sljedećih izjava sudovi?

- "Dva plus tri jednako je pet" $\longleftarrow$ To je istinit sud
- "Dva plus tri jednako je osam"

Primjer 20.

Koje su od sljedećih izjava sudovi?

- "Dva plus tri jednako je pet" $\longleftarrow$ To je istinit sud
- "Dva plus tri jednako je osam" $\longleftarrow$ To je lažan sud

Primjer 20.

Koje su od sljedećih izjava sudovi?

- "Dva plus tri jednako je pet" $\longleftarrow$ To je istinit sud
- "Dva plus tri jednako je osam" $\longleftarrow$ To je lažan sud
- "x plus y jednako je z"

Primjer 20.

Koje su od sljedećih izjava sudovi?

- "Dva plus tri jednako je pet" $\longleftarrow$ To je istinit sud
- "Dva plus tri jednako je osam" $\longleftarrow$ To je lažan sud
- "x plus y jednako je z" $\longleftarrow$ To nije sud

Primjer 20.

Koje su od sljedećih izjava sudovi?

- "Dva plus tri jednako je pet" $\leftarrow$ To je istinit sud
- "Dva plus tri jednako je osam" $\leftarrow$ To je lažan sud
- "x plus y jednako je z" $\leftarrow$ To nije sud
- "x plus y jednako je 9"

Primjer 20.

Koje su od sljedećih izjava sudovi?

- "Dva plus tri jednako je pet" $\longleftarrow$ To je istinit sud
- "Dva plus tri jednako je osam" $\longleftarrow$ To je lažan sud
- "x plus y jednako je z" $\longleftarrow$ To nije sud
- "x plus y jednako je 9" $\longleftarrow$ To nije sud

Primjer 20.

Koje su od sljedećih izjava sudovi?

- "Dva plus tri jednako je pet" ← To je istinit sud
- "Dva plus tri jednako je osam" ← To je lažan sud
- "x plus y jednako je z" ← To nije sud
- "x plus y jednako je 9" ← To nije sud
- "x je prost broj"

Primjer 20.

Koje su od sljedećih izjava sudovi?

- "Dva plus tri jednako je pet" $\longleftarrow$ To je istinit sud
- "Dva plus tri jednako je osam" $\longleftarrow$ To je lažan sud
- "x plus y jednako je z" $\longleftarrow$ To nije sud
- "x plus y jednako je 9" $\longleftarrow$ To nije sud
- "x je prost broj" $\longleftarrow$ To nije sud

Primjer 20.

Koje su od sljedećih izjava sudovi?

- "Dva plus tri jednako je pet" $\longleftarrow$ To je istinit sud
- "Dva plus tri jednako je osam" $\longleftarrow$ To je lažan sud
- "x plus y jednako je z" $\longleftarrow$ To nije sud
- "x plus y jednako je 9" $\longleftarrow$ To nije sud
- "x je prost broj" $\longleftarrow$ To nije sud
- "8 je prost broj."

Primjer 20.

Koje su od sljedećih izjava sudovi?

- "Dva plus tri jednako je pet" $\longleftarrow$ To je istinit sud
- "Dva plus tri jednako je osam" $\longleftarrow$ To je lažan sud
- "x plus y jednako je z" $\longleftarrow$ To nije sud
- "x plus y jednako je 9" $\longleftarrow$ To nije sud
- "x je prost broj" $\longleftarrow$ To nije sud
- "8 je prost broj." $\longleftarrow$ To je lažan sud

Primjer 20.

Koje su od sljedećih izjava sudovi?

- "Dva plus tri jednako je pet" $\longleftarrow$ To je istinit sud
- "Dva plus tri jednako je osam" $\longleftarrow$ To je lažan sud
- "x plus y jednako je z" $\longleftarrow$ To nije sud
- "x plus y jednako je 9" $\longleftarrow$ To nije sud
- "x je prost broj" $\longleftarrow$ To nije sud
- "8 je prost broj." $\longleftarrow$ To je lažan sud
- "x je manje od y"

Primjer 20.

Koje su od sljedećih izjava sudovi?

- "Dva plus tri jednako je pet" ← To je istinit sud
- "Dva plus tri jednako je osam" ← To je lažan sud
- "x plus y jednako je z" ← To nije sud
- "x plus y jednako je 9" ← To nije sud
- "x je prost broj" ← To nije sud
- "8 je prost broj." ← To je lažan sud
- "x je manje od y" ← To nije sud

Primjer 20.

Koje su od sljedećih izjava sudovi?

- "Dva plus tri jednako je pet" $\longleftarrow$ To je istinit sud
- "Dva plus tri jednako je osam" $\longleftarrow$ To je lažan sud
- "x plus y jednako je z" $\longleftarrow$ To nije sud
- "x plus y jednako je 9" $\longleftarrow$ To nije sud
- "x je prost broj" $\longleftarrow$ To nije sud
- "8 je prost broj." $\longleftarrow$ To je lažan sud
- "x je manje od y" $\longleftarrow$ To nije sud
- "4 je manje od 5"

Primjer 20.

Koje su od sljedećih izjava sudovi?

- "Dva plus tri jednako je pet" $\longleftarrow$ To je istinit sud
- "Dva plus tri jednako je osam" $\longleftarrow$ To je lažan sud
- "x plus y jednako je z" $\longleftarrow$ To nije sud
- "x plus y jednako je 9" $\longleftarrow$ To nije sud
- "x je prost broj" $\longleftarrow$ To nije sud
- "8 je prost broj." $\longleftarrow$ To je lažan sud
- "x je manje od y" $\longleftarrow$ To nije sud
- "4 je manje od 5" $\longleftarrow$ To je istinit sud

Primjer 20.

Koje su od sljedećih izjava sudovi?

- "Dva plus tri jednako je pet" ← To je istinit sud
- "Dva plus tri jednako je osam" ← To je lažan sud
- "x plus y jednako je z" ← To nije sud
- "x plus y jednako je 9" ← To nije sud
- "x je prost broj" ← To nije sud
- "8 je prost broj." ← To je lažan sud
- "x je manje od y" ← To nije sud
- "4 je manje od 5" ← To je istinit sud
- "8 je manje od 3"

Primjer 20.

Koje su od sljedećih izjava sudovi?

- "Dva plus tri jednako je pet" $\leftarrow$ To je istinit sud
- "Dva plus tri jednako je osam" $\leftarrow$ To je lažan sud
- "x plus y jednako je z" $\leftarrow$ To nije sud
- "x plus y jednako je 9" $\leftarrow$ To nije sud
- "x je prost broj" $\leftarrow$ To nije sud
- "8 je prost broj." $\leftarrow$ To je lažan sud
- "x je manje od y" $\leftarrow$ To nije sud
- "4 je manje od 5" $\leftarrow$ To je istinit sud
- "8 je manje od 3" $\leftarrow$ To je lažan sud

Pogledajmo sada rečenicu

$$\text{"}x \text{ je prost broj"}.$$

Ta rečenica iznosi tvrdnju koja se odnosi na nepoznatu varijablu x i ta rečenica će postati sud ukoliko se specificira nepoznata varijabla x.

Predikat je rečenica koja sadrži tvrdnju o nepoznatim veličinama i koja postaje sud ukoliko se specificiraju te nepoznate veličine.

$$\mathrm{Prost}\,(x) := \text{"}x \text{ je prost broj"} \quad \leftarrow \text{To je predikat}$$

$$\mathrm{Prost}\,(7) := \text{"7 je prost broj"} \quad \leftarrow \text{To je istinit sud}$$

$$\mathrm{Prost}\,(6) := \text{"6 je prost broj"} \quad \leftarrow \text{To je lažan sud}$$

$\mathrm{Prost}\,(x)$ je predikat koji ima jednu nepoznatu veličinu pa onda kažemo da je to predikat s jednom varijablom.

$$P(x,y) := \text{"}x \text{ je manje od } y\text{"}$$

$P(x,y)$ je predikat koji ima dvije nepoznate veličine pa onda kažemo da je to predikat s dvije varijable.
Koristimo li se matematičkim simbolima, taj predikat kraće možemo zapisati

$$P(x,y) := \text{"}x < y\text{"}.$$

$$P(4,7) := \text{"}4 < 7\text{"} \;\leftarrow \text{To je istinit sud}$$

$$P(5,2) := \text{"}5 < 2\text{"} \;\leftarrow \text{To je lažan sud}$$

$$P(8,8) := \text{"}8 < 8\text{"} \;\leftarrow \text{To je lažan sud}$$

$$Q(a,b,c) := \text{"}a+b=c\text{"}$$

$Q(a,b,c)$ je predikat koji ima tri nepoznate veličine pa onda kažemo da je to predikat s tri varijable.

$$Q(7,1,4) := \text{"}7+1=4\text{"} \;\leftarrow \text{To je lažan sud}$$

$$Q(5,3,8) := \text{"}5+3=8\text{"} \;\leftarrow \text{To je istinit sud}$$

Ako predikat ima n nepoznatih veličina, tada kažemo da je to predikat s n varijabli.

U informatici je od posebnog interesa kako ispitati da li elementi nekog skupa imaju određeno svojstvo (npr. tko je sve od studenata određenog godišta položio ispit iz Matematike 1). Taj problem je povezan sa zapisivanjem predikata.
Skup elemenata na koje se odnosi zadani predikat P zove se **univerzum razmatranja** U. Taj skup za neke predikate nije potrebno posebno odrediti i pritom se podrazumijeva da se radi o najopćenitijem skupu na koji se promatrani predikat može primijeniti. Ukoliko se promatrano svojstvo koje se opisuje predikatom ispituje na nekom podskupu većeg skupa, potrebno je odrediti univerzum razmatranja.

Promatramo li predikat

$$\mathrm{Prost}\,(x) := \text{"}x \text{ je prost broj"},$$

tada je jasno da je univerzum razmatranja skup prirodnih brojeva, tj. $U = \mathbb{N}$. Jasno je da ga nema smisla promatrati na skupu realnih brojeva jer svojstvo "biti prost broj" je definirano samo za prirodne brojeve. Naravno, svojstvo "biti prost broj" možemo proučavati i na nekom podskupu od $\mathbb{N}$, npr. na prirodnim brojevima koji su manji od 9. Tada moramo naglasiti da je univerzum razmatranja

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}.$$

Isto tako, promatramo li predikat

$$P(x, y) := "x < y",$$

jasno je da je univerzum razmatranja $U = \mathbb{R}$. Naravno, taj predikat možemo proučavati i na bilo kojem podskupu od $\mathbb{R}$, samo tada moramo eksplicitno naglasiti naš univerzum razmatranja.
Nadalje, jasno je da taj predikat nema smisla proučavati na skupu kompleksnih brojeva jer na njemu nemamo definirani uređaj. Još je jasnije da taj predikat nema smisla proučavati na skupu gradova Hrvatske jer svojstvo "biti manje od" nije definirano za gradove Hrvatske (osim ako si ga mi na neki način ne definiramo).

Na primjer, ako su x i y hrvatski gradovi, mogli bismo definirati svojstvo "biti manje od" (i kratko pisati "$<$") za gradove Hrvatske sa

$x < y$ ako i samo ako x ima manje stanovnika od y

ili

$x < y$ ako i samo ako x ima manju površinu od y

ili

$x < y$ ako i samo ako u x živi manje matematičara nego u y

ili na neki drugi način (ovisno što nas interesira) i onda tako definirano svojstvo proučavati na gradovima Hrvatske.

Ako je univerzum razmatranja konačan skup, tada predikat zapisujemo pomoću tablice u kojoj se elementima iz univerzuma razmatranja pridružuje istinitost suda koji se dobije uvrštavanjem vrijednosti varijable u predikat. Za tablicu predikata često se koristi i pojam **matrica predikata**.

Ako predikat ima jednu ili dvije varijable, njegova tablica je jednodimenzionalna odnosno dvodimenzionalna. U slučaju da predikat ima n varijabli, njegova tablica je n-dimenzionalna. Za $n > 2$ je tada problem tu tablicu grafički prikazati na papiru, ali nije nikakav problem spremiti ju u memoriju računala (uz pretpostavku da imamo dovoljno memorije) kao višedimenzionalno polje. Kasnije ćemo se baviti matricama koje su zapravo dvodimenzionalna polja.

Primjer 21.

Napišite matricu predikata za predikat

$\mathrm{Prost}\,(x) :=$ *"x je prost broj" ako je univerzum razmatranja* $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Primjer 21.

Napišite matricu predikata za predikat $\operatorname{Prost}(x) :=$ *"x je prost broj" ako je univerzum razmatranja* $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Rješenje.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$v(\operatorname{Prost}(x))$	0	1	1	0	1	0	1	0	0

Primjer 22.

Napišite matricu predikata za predikat

$P(x, y) :=$ "$x > y$" *ako je univerzum razmatranja*

$U = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N},\ x < 8,\ y < 8\}$.

Primjer 22.

Napišite matricu predikata za predikat

$P(x, y) :=$ "$x > y$" *ako je univerzum razmatranja*

$U = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N},\ x < 8,\ y < 8\}$.

Rješenje.

$x \setminus y$	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0	0
3	1	1	0	0	0	0	0
4	1	1	1	0	0	0	0
5	1	1	1	1	0	0	0
6	1	1	1	1	1	0	0
7	1	1	1	1	1	1	0

Neka je $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ predikat s n varijabli i neka je U univerzum razmatranja.

- Ako je $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zadovoljen za svaki izbor n-torke argumenata iz univerzuma razmatranja U, tada kažemo da taj predikat **vrijedi** u U. Drugim riječima, u matrici tog predikata je na svakom mjestu jedinica.
- Ako je $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zadovoljen za neku n-torku argumenata iz univerzuma razmatranja U, tada kažemo da je taj predikat **zadovoljiv** u U. Drugim riječima, u matrici tog predikata je bar na jednom mjestu jedinica.

- Ako ne postoji n-torka argumenata iz univerzuma razmatranja U koja zadovoljava $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, tada kažemo da taj predikat **nije zadovoljiv** u U. Drugim riječima, u matrici tog predikata je na svakom mjestu nula.

Napomena.

Neki predikat može vrijediti u nekom univerzumu razmatranja, dok u nekom drugom može biti samo zadovoljiv, a u nekom trećem univerzumu razmatranja ne mora uopće biti zadovoljiv.

Pogledajmo predikat $\mathrm{Prost}\,(x) :=$ "x je prost broj".

Ako je univerzum razmatranja $U_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 15\}$, tada je taj predikat zadovoljiv u U_1 jer npr., $\mathrm{Prost}\,(5)$ je istinit sud. Međutim taj predikat ne vrijedi u U_1 jer npr., $\mathrm{Prost}\,(8)$ je lažan sud.

Pogledajmo predikat $\mathrm{Prost}\,(x) :=$ "x je prost broj".

Ako je univerzum razmatranja $U_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 15\}$, tada je taj predikat zadovoljiv u U_1 jer npr., $\mathrm{Prost}\,(5)$ je istinit sud. Međutim taj predikat ne vrijedi u U_1 jer npr., $\mathrm{Prost}\,(8)$ je lažan sud.

Ako je univerzum razmatranja $U_2 = \{2, 3, 11, 17\}$, tada taj predikat vrijedi u U_2 jer su $\mathrm{Prost}\,(2)$, $\mathrm{Prost}\,(3)$, $\mathrm{Prost}\,(11)$, $\mathrm{Prost}\,(17)$ istiniti sudovi, tj. matrica tog predikata u U_2 ima na svakom mjestu jedinicu.

Pogledajmo predikat $\mathrm{Prost}\,(x) :=$ "x je prost broj".

Ako je univerzum razmatranja $U_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 15\}$, tada je taj predikat zadovoljiv u U_1 jer npr., $\mathrm{Prost}\,(5)$ je istinit sud. Međutim taj predikat ne vrijedi u U_1 jer npr., $\mathrm{Prost}\,(8)$ je lažan sud.

Ako je univerzum razmatranja $U_2 = \{2, 3, 11, 17\}$, tada taj predikat vrijedi u U_2 jer su $\mathrm{Prost}\,(2)$, $\mathrm{Prost}\,(3)$, $\mathrm{Prost}\,(11)$, $\mathrm{Prost}\,(17)$ istiniti sudovi, tj. matrica tog predikata u U_2 ima na svakom mjestu jedinicu.

Ako je univerzum razmatranja $U_3 = \{4, 8, 9, 14, 33\}$, tada taj predikat nije zadovoljiv u U_3 jer su svi sudovi $\mathrm{Prost}\,(4)$, $\mathrm{Prost}\,(8)$, $\mathrm{Prost}\,(9)$, $\mathrm{Prost}\,(14)$, $\mathrm{Prost}\,(33)$ lažni.

Nije teško odgovoriti i na sljedeća pitanja:

- Koji je maksimalni univerzum razmatranja na kojemu vrijedi predikat $\mathrm{Prost}\,(x)$?

Nije teško odgovoriti i na sljedeća pitanja:

- Koji je maksimalni univerzum razmatranja na kojemu vrijedi predikat $\mathrm{Prost}\,(x)$?

  Maksimalni univerzum razmatranja na kojemu vrijedi predikat $\mathrm{Prost}\,(x)$ *je skup svih prostih brojeva.*

Nije teško odgovoriti i na sljedeća pitanja:

- Koji je maksimalni univerzum razmatranja na kojemu vrijedi predikat $\mathrm{Prost}\,(x)$?
  Maksimalni univerzum razmatranja na kojemu vrijedi predikat $\mathrm{Prost}\,(x)$ *je skup svih prostih brojeva.*
- Koji je maksimalni univerzum razmatranja na kojemu predikat $\mathrm{Prost}\,(x)$ nije zadovoljiv?

Nije teško odgovoriti i na sljedeća pitanja:

- Koji je maksimalni univerzum razmatranja na kojemu vrijedi predikat $\mathrm{Prost}\,(x)$?
  Maksimalni univerzum razmatranja na kojemu vrijedi predikat $\mathrm{Prost}\,(x)$ *je skup svih prostih brojeva.*
- Koji je maksimalni univerzum razmatranja na kojemu predikat $\mathrm{Prost}\,(x)$ nije zadovoljiv?
  Maksimalni univerzum razmatranja na kojemu predikat $\mathrm{Prost}\,(x)$ *nije zadovoljiv je skup svih složenih prirodnih brojeva.*

Nije teško odgovoriti i na sljedeća pitanja:

- Koji je maksimalni univerzum razmatranja na kojemu vrijedi predikat $\mathrm{Prost}\,(x)$?
  Maksimalni univerzum razmatranja na kojemu vrijedi predikat $\mathrm{Prost}\,(x)$ *je skup svih prostih brojeva.*
- Koji je maksimalni univerzum razmatranja na kojemu predikat $\mathrm{Prost}\,(x)$ nije zadovoljiv?
  Maksimalni univerzum razmatranja na kojemu predikat $\mathrm{Prost}\,(x)$ *nije zadovoljiv je skup svih složenih prirodnih brojeva.*
- Koji je maksimalni univerzum razmatranja na kojemu je zadovoljiv predikat $\mathrm{Prost}\,(x)$?

Nije teško odgovoriti i na sljedeća pitanja:

- Koji je maksimalni univerzum razmatranja na kojemu vrijedi predikat $\mathrm{Prost}(x)$?
  Maksimalni univerzum razmatranja na kojemu vrijedi predikat $\mathrm{Prost}(x)$ *je skup svih prostih brojeva.*
- Koji je maksimalni univerzum razmatranja na kojemu predikat $\mathrm{Prost}(x)$ nije zadovoljiv?
  Maksimalni univerzum razmatranja na kojemu predikat $\mathrm{Prost}(x)$ *nije zadovoljiv je skup svih složenih prirodnih brojeva.*
- Koji je maksimalni univerzum razmatranja na kojemu je zadovoljiv predikat $\mathrm{Prost}(x)$?
  Maksimalni univerzum razmatranja na kojemu je zadovoljiv predikat $\mathrm{Prost}(x)$ *je skup* $\mathbb{N}$.

Ograničavanje varijabli u predikatu

Da bi se od predikata dobio sud nužno je odrediti ili ograničiti vrijednosti varijabli koje sadrži predikat.

To se može napraviti na dva osnovna načina:

1. Pridruživanjem određene vrijednosti varijablama
2. Upotrebom kvantifikatora

Prvi način smo upoznali tokom dosadašnjeg objašnjavanja pojma predikata.

Univerzalni kvantifikator

$\forall$ – "za svaki", "za sve", "za proizvoljan"

U matematici se često koriste rečenice oblika

"Za svaki x vrijedi tvrdnja $P(x)$"

pri čemu je $P(x)$ zadani predikat.

Ovu rečenicu kraće zapisujemo $\forall x P(x)$.

Budući da je upotrebom znaka $\forall$ određeno na koje vrijednosti od x se odnosi tvrdnja iz predikata $P(x)$, rečenica $\forall x P(x)$ je sud za koji vrijedi:

Sud $\forall x P(x)$ je istinit ako i samo ako $P(x)$ vrijedi u univerzumu razmatranja U.

Primjer 23.

Odredite istinitosti sljedećih sudova u univerzumu razmatranja $U = \mathbb{Z}$. *Za sudove koji nisu istiniti u tom univerzumu razmatranja, odredite maksimalni univerzum razmatranja sadržan u* $\mathbb{Z}$ *u kojemu su istiniti.*

(a) $\forall x(x < x + 1)$ *(b)* $\forall x(x > 5)$ *(c)* $\forall x(x = 5)$.

Primjer 23.

Odredite istinitosti sljedećih sudova u univerzumu razmatranja $U = \mathbb{Z}$. Za sudove koji nisu istiniti u tom univerzumu razmatranja, odredite maksimalni univerzum razmatranja sadržan u $\mathbb{Z}$ u kojemu su istiniti.

(a) $\forall x(x < x + 1)$ *(b)* $\forall x(x > 5)$ *(c)* $\forall x(x = 5)$.

Rješenje.

(a) Nejednakost $x < x + 1$ je ekvivalentna sa nejednakosti $0 < 1$ koja očito vrijedi za svaki $x \in \mathbb{Z}$, pa je $\forall x(x < x + 1)$ istinit sud u univerzumu razmatranja $U = \mathbb{Z}$.

(b) Sud $\forall x(x > 5)$ nije istinit u univerzumu razmatranja $U = \mathbb{Z}$ jer npr. $2 \not> 5$. Maksimalni univerzum razmatranja sadržan u $\mathbb{Z}$ u kojemu je ovaj sud istinit je $U_1 = \{6, 7, 8, \ldots\}$, tj. to je skup svih prirodnih brojeva većih od 5.

(b) Sud $\forall x(x > 5)$ nije istinit u univerzumu razmatranja $U = \mathbb{Z}$ jer npr. $2 \not> 5$. Maksimalni univerzum razmatranja sadržan u $\mathbb{Z}$ u kojemu je ovaj sud istinit je $U_1 = \{6, 7, 8, \ldots\}$, tj. to je skup svih prirodnih brojeva većih od 5.

(c) Sud $\forall x(x = 5)$ nije istinit u univerzumu razmatranja $U = \mathbb{Z}$ jer npr. $3 \neq 5$. Maksimalni univerzum razmatranja sadržan u $\mathbb{Z}$ u kojemu je ovaj sud istinit je $U_1 = \{5\}$.

Egzistencijalni kvantifikator

$\exists$ – "za neki", "postoji takav", "za najmanje jedan"

U matematici se često koriste rečenice oblika

"Za neki x vrijedi tvrdnja $P(x)$"

pri čemu je $P(x)$ zadani predikat.

Ovu rečenicu kraće zapisujemo $\exists x P(x)$.

Rečenica $\exists x P(x)$ je sud za koji vrijedi:

Sud $\exists x P(x)$ je istinit ako i samo ako je $P(x)$ zadovoljiv u univerzumu razmatranja U.

$\exists!$ – "postoji jedinstveni", "postoji jedan i samo jedan"

U matematici se često koriste rečenice oblika

"Postoji jedinstveni x za koji vrijedi tvrdnja $P(x)$"

pri čemu je $P(x)$ zadani predikat.

Ovu rečenicu kraće zapisujemo $\exists! x P(x)$.

Time se izražava tvrdnja da $P(x)$ vrijedi samo za jednu vrijednost od x.

Primjer 24.

Odredite istinitosti sljedećih sudova u univerzumu razmatranja $U = \mathbb{Z}$. *Za sudove koji nisu istiniti u tom univerzumu razmatranja, odredite maksimalni univerzum razmatranja sadržan u* $\mathbb{Z}$ *u kojemu su istiniti.*

(a) $\exists x(x < x + 1)$ *(b)* $\exists! x(x < x + 1)$ *(c)* $\exists x(x = 5)$

(d) $\exists! x(x = 5)$ *(e)* $\exists! x(x = x \cdot x)$

Primjer 24.

Odredite istinitosti sljedećih sudova u univerzumu razmatranja $U = \mathbb{Z}$. Za sudove koji nisu istiniti u tom univerzumu razmatranja, odredite maksimalni univerzum razmatranja sadržan u $\mathbb{Z}$ u kojemu su istiniti.

(a) $\exists x(x < x + 1)$ *(b)* $\exists! x(x < x + 1)$ *(c)* $\exists x(x = 5)$

(d) $\exists! x(x = 5)$ *(e)* $\exists! x(x = x \cdot x)$

Rješenje.

(a) Sud $\exists x(x < x + 1)$ je istinit u U, npr. ako uzmemo $x = 4$.

Primjer 24.

Odredite istinitosti sljedećih sudova u univerzumu razmatranja $U = \mathbb{Z}$. Za sudove koji nisu istiniti u tom univerzumu razmatranja, odredite maksimalni univerzum razmatranja sadržan u $\mathbb{Z}$ u kojemu su istiniti.

(a) $\exists x(x < x+1)$ *(b)* $\exists! x(x < x+1)$ *(c)* $\exists x(x = 5)$
(d) $\exists! x(x = 5)$ *(e)* $\exists! x(x = x \cdot x)$

Rješenje.

(a) Sud $\exists x(x < x+1)$ je istinit u U, npr. ako uzmemo $x = 4$.

(b) Sud $\exists! x(x < x+1)$ nije istinit u U jer postoji više x-ova za koje vrijedi da je $x < x+1$ (preciznije, to vrijedi za sve $x \in U$). Maksimalni univerzum razmatranja

sadržan u U u kojemu bi bio istinit taj sud je npr. $U_1 = \{2\}$ ili bilo koji jednočlani podskup od $\mathbb{Z}$.

sadržan u U u kojemu bi bio istinit taj sud je npr. $U_1 = \{2\}$ ili bilo koji jednočlani podskup od $\mathbb{Z}$.

(c) Sud $\exists x(x = 5)$ je istinit u U jer je $5 \in U$.

sadržan u U u kojemu bi bio istinit taj sud je npr. $U_1 = \{2\}$ ili bilo koji jednočlani podskup od $\mathbb{Z}$.

(c) Sud $\exists x(x = 5)$ je istinit u U jer je $5 \in U$.

(d) Sud $\exists! x(x = 5)$ je istinit u U jer je $5 \in U$ i on je jedini takav za kojeg vrijedi da je x jednako 5.

sadržan u U u kojemu bi bio istinit taj sud je npr. $U_1 = \{2\}$ ili bilo koji jednočlani podskup od $\mathbb{Z}$.

(c) Sud $\exists x(x = 5)$ je istinit u U jer je $5 \in U$.

(d) Sud $\exists! x(x = 5)$ je istinit u U jer je $5 \in U$ i on je jedini takav za kojeg vrijedi da je x jednako 5.

(e) Sud $\exists! x(x = x \cdot x)$ nije istinit u U jer $x = x \cdot x$ vrijedi za $x = 0$ i za $x = 1$.

Veza između kvantifikatora i logičkih operacija

Ako je zadan predikat $P(x)$ i univerzum razmatranja $U = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, tada su sljedeći sudovi ekvivalentni:

$$\forall x P(x) \Leftrightarrow P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \ldots \wedge P(x_n)$$

$$\exists x P(x) \Leftrightarrow P(x_1) \vee P(x_2) \vee \ldots \vee P(x_n)$$

$$\begin{aligned}\exists! x P(x) \Leftrightarrow & \Big(P(x_1) \wedge \neg P(x_2) \wedge \ldots \wedge \neg P(x_n)\Big) \vee \\ & \vee \Big(\neg P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \ldots \wedge \neg P(x_n)\Big) \vee \\ & \vee \ldots \vee \Big(\neg P(x_1) \wedge \neg P(x_2) \wedge \ldots \wedge P(x_n)\Big)\end{aligned}$$

Negacija, predikat i kvantifikator

$$\neg \forall x P(x) \quad \Leftrightarrow \quad \exists x \neg P(x)$$

$$\neg \exists x P(x) \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \neg P(x)$$

Primjer 25.

Rečenicu "Nije istina da neki misle da general nije kriv" zapišite pomoću predikata $K(x) :=$ "x misli da je general kriv", negacije i kvantifikatora. Zatim na temelju svojstava negacije i kvantifikatora zamijenite tu rečenicu jednostavnijom.

Rješenje.

Jedan dio naše rečenice je "... neki misle da general nije kriv", a taj dio možemo napisati u obliku $\exists x \neg K(x)$. Međutim, prvi dio te rečenice govori da to nije istina pa našu rečenicu "Nije istina da neki misle da general nije kriv" možemo napisati u obliku $\neg\big(\exists x \neg K(x)\big)$.

Rješenje.

Jedan dio naše rečenice je "...neki misle da general nije kriv", a taj dio možemo napisati u obliku $\exists x \neg K(x)$. Međutim, prvi dio te rečenice govori da to nije istina pa našu rečenicu "Nije istina da neki misle da general nije kriv" možemo napisati u obliku $\neg\big(\exists x \neg K(x)\big)$.

Koristeći svojstva negacije i kvantifikatora to možemo pojednostavniti.

$$\neg\big(\exists x \neg K(x)\big) \;\Leftrightarrow\; \forall x \neg\big(\neg K(x)\big) \;\Leftrightarrow\; \forall x K(x)$$

Dakle, rečenicu "Nije istina da neki misle da general nije kriv" možemo zamijeniti jednostavnijom rečenicom "Svi misle da je general kriv".

Osim ekvivalencija koje se odnose na negaciju i kvantifikatore, vrijede i sljedeće relacije (oprez, nisu sve ekvivalencije):

$$\begin{aligned}
\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) &\Leftrightarrow \forall x \big(P(x) \wedge Q(x)\big) \\
\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) &\Rightarrow \forall x \big(P(x) \vee Q(x)\big) \\
\exists x \big(P(x) \wedge Q(x)\big) &\Rightarrow \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x) \\
\exists x P(x) \vee \exists x Q(x) &\Leftrightarrow \exists x \big(P(x) \vee Q(x)\big)
\end{aligned}$$

Pogledajmo zašto u

$$\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \quad \Rightarrow \quad \forall x \big(P(x) \vee Q(x)\big)$$

vrijedi samo jedna implikacija, a ne vrijedi ekvivalencija. Znamo da je implikacija lažna jedino u slučaju da je pretpostavka istinita, a posljedica lažna. Pretpostavimo da je $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ istinit sud. Tada je barem jedan od sudova $\forall x P(x)$ i $\forall x Q(x)$ istinit. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\forall x P(x)$ istinit sud. To znači da predikat $P(x)$ vrijedi u univerzumu razmatranja U. No, tada i predikat $P(x) \vee Q(x)$ vrijedi u univerzumu razmatranja U, a to znači da je $\forall x \big(P(x) \vee Q(x)\big)$ istinit sud, pa vrijedi gornja implikacija.

Zašto ne vrijedi obrnuta implikacija, tj. zašto ne vrijedi

$$\forall x\big(P(x) \lor Q(x)\big) \quad \Rightarrow \quad \forall x P(x) \lor \forall x Q(x).$$

Da bismo dokazali da ova implikacija ne vrijedi, trebamo naći neki protuprimjer, tj. trebamo naći predikate $P(x)$ i $Q(x)$, te univerzum razmatranja U u kojemu bi $\forall x\big(P(x) \lor Q(x)\big)$ bio istinit sud, a $\forall x P(x) \lor \forall x Q(x)$ lažan sud.

Uzmimo da je $U = \mathbb{N}$, a $P(x) :=$ "x je paran broj", $Q(x) :=$ "x je neparan broj".
Očito predikat $P(x) \lor Q(x)$ vrijedi u U (jer svaki prirodni broj ili je paran ili je neparan) pa je $\forall x\big(P(x) \lor Q(x)\big)$ istinit sud.

No, jasno je da je sud $\forall x P(x)$ lažan jer nije svaki prirodni broj paran, a isto tako je i sud $\forall x Q(x)$ lažan jer nije svaki prirodni broj neparan. Tada je i sud $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ lažan.

Zadatak 6.

Na sličan način pokažite da vrijedi implikacija

$$\exists x \big(P(x) \wedge Q(x)\big) \quad \Rightarrow \quad \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x),$$

ali da obrnuta implikacija ne vrijedi, tj. da ne vrijedi ekvivalencija.

Sudovi s više kvantifikatora

Ako je zadan predikat s više varijabli, moguće je više njih ograničiti kvantifikatorima i dobiti sud. Pritom treba paziti na redoslijed kvantifikatora jer to utječe na smisao rečenice kojom se izriče sud, odnosno na njegovu istinitost. Bez detaljnog ulaska u tu teoriju, na primjerima ćemo vidjeti da redoslijed pisanja kvantifikatora i varijabli bitno utječe na smisao i istinitost suda u kojemu se javljaju.

Primjer 26.

Neka je univerzum razmatranja $U = \mathbb{Z}$. *Odredite istinitost sljedećih sudova:*

(a) $\forall x \exists y (x + y = 0)$ *(b)* $\exists y \forall x (x + y = 0)$

(c) $\exists ! x \forall y (x \cdot y = 0)$ *(d)* $\forall y \exists ! x (x \cdot y = 0)$

Primjer 26.

Neka je univerzum razmatranja $U = \mathbb{Z}$. Odredite istinitost sljedećih sudova:

(a) $\forall x \exists y (x + y = 0)$ *(b)* $\exists y \forall x (x + y = 0)$

(c) $\exists ! x \forall y (x \cdot y = 0)$ *(d)* $\forall y \exists ! x (x \cdot y = 0)$

Rješenje.

(a) To je istinit sud jer ako uzmemo bilo koji $x \in \mathbb{Z}$, tada postoji cijeli broj y koji u sumi sa x daje 0, naime $y = -x$.

Primjer 26.

Neka je univerzum razmatranja $U = \mathbb{Z}$. Odredite istinitost sljedećih sudova:

(a) $\forall x \exists y (x + y = 0)$ *(b)* $\exists y \forall x (x + y = 0)$

(c) $\exists! x \forall y (x \cdot y = 0)$ *(d)* $\forall y \exists! x (x \cdot y = 0)$

Rješenje.

(a) To je istinit sud jer ako uzmemo bilo koji $x \in \mathbb{Z}$, tada postoji cijeli broj y koji u sumi sa x daje 0, naime $y = -x$.

(b) To nije istinit sud jer ne postoji cijeli broj y koji bi u sumi sa svakim cijelim brojem x davao nulu.

Primjer 26.

Neka je univerzum razmatranja $U = \mathbb{Z}$. Odredite istinitost sljedećih sudova:

(a) $\forall x \exists y (x + y = 0)$ *(b)* $\exists y \forall x (x + y = 0)$

(c) $\exists! x \forall y (x \cdot y = 0)$ *(d)* $\forall y \exists! x (x \cdot y = 0)$

Rješenje.

(a) To je istinit sud jer ako uzmemo bilo koji $x \in \mathbb{Z}$, tada postoji cijeli broj y koji u sumi sa x daje 0, naime $y = -x$.

(b) To nije istinit sud jer ne postoji cijeli broj y koji bi u sumi sa svakim cijelim brojem x davao nulu.

(c) To je istinit sud jer očito je $x = 0$ jedini cijeli broj koji u produktu sa svakim cijelim brojem y daje 0.

(d) To nije istinit sud jer za $y = 0$ svaki cijeli broj x u produktu sa y daje 0 (pa nemamo jedinstveni takav x).

Dopuštene su sljedeće zamjene kvantifikatora:

$$\begin{aligned} \forall x \forall y &\Leftrightarrow \forall y \forall x \\ \exists x \exists y &\Leftrightarrow \exists y \exists x \end{aligned}$$