

PITUP - Križevci

Matematika

26.6.2015.

– pismeni ispit –

IME I PREZIME: _____

popunjavanje profesor:

ZADATAK	1.	2.	3.	4.	5.	6.	UKUPNO	OCJENA
BROJ BODOVA								

Uputa. U svakoj grupi zadataka treba za prolaznu ocjenu imati barem 10 bodova i ukupni broj bodova mora biti veći od 30.

I. grupa **Diskretna matematika**

1. Zadana je funkcija algebre sudova

$$F(x, y, z) = ((\bar{x} \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow \bar{x})) \wedge ((x \Leftrightarrow \bar{x}) \Rightarrow (y \vee \bar{z})).$$

- (a) Izradite semantičku tablicu zadane funkcije. (4 boda)
- (b) Ispišite obje normalne forme zadane funkcije. (2 boda)
- (c) Minimizirajte zadanu funkciju. (4 boda)

2. (a) Ako su $A = \{x \in \mathbb{N} : x \in \langle -2, 4 \rangle\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} : 1 < x \leq 5\}$, $C = \{1, 4, 5\}$, odredite

$$D = (A \cup C) \setminus (C \cap B) \text{ i } \mathcal{P}(D),$$

pri čemu $\mathcal{P}(D)$ označava partitivni skup od D . (6 bodova)

- (b) Dokažite da vrijedi svojstvo distributivnosti (unije prema presjeku) za skupove A , B i C iz (a) dijela zadatka. (4 boda)

3. Zadana je relacija $\rho = \{(1, 1), (3, 1), (3, 5), (3, 3), (5, 1), (5, 5)\}$ na skupu $A = \{1, 3, 5\}$

- (a) Prikažite relaciju ρ pomoću vrhova i lukova. Ispišite matricu incidencije zadane relacije. (2 boda)
- (b) Za relaciju ρ ispitajte svojstva: refleksivnost, irefleksivnost, simetričnost, antisimetričnost, tranzitivnost. (6 bodova)
- (c) Odredite dualnu relaciju relacije ρ . (2 boda)

II. grupa **Linearna algebra**

4. Zadana je kvadratna matrica A reda 3 sa

$$a_{ij} = \begin{cases} |j - i|, & \text{za } i > j \\ i + j, & \text{za } i \leq j \end{cases}$$

- (a) Ispišite matricu A . (2 boda)
- (b) Zadan je polinom $f(x) = x^2 - 3x - 1$. Odredite $f(A)$. (3 boda)
- (c) Neka su zadane matrice

$$B = \begin{bmatrix} -22 \\ 33 \\ -22 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

i matrica A kao u (a) dijelu zadatka. Riješite sustav $AX = B$ pomoću inverzne matrice. (5 bodova)

5. Zadana je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ -1 & 7 & -3 & 4 \\ 2 & -9 & 5 & 7 \\ 1 & -6 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

- (a) Izračunajte $\det(A)$. (6 bodova)
- (b) Koliki je rang matrice A ? Odgovor obrazložite. (4 boda)

6. Zadan je sustav jednažbi

$$\begin{aligned} 4x + 6y + 4z + 6t &= 2 \\ x - 4y + z - 6t &= -4 \\ 3x + 4y + 3z + 7t &= 3 \\ -3x + 2y - 3z + 3t &= 3. \end{aligned}$$

Gausovim postupkom odredite opće rješenje sustava tako da x bude parametar. (10 bodova)

x	y	z	$\bar{x} \Rightarrow y$	$y \Rightarrow \bar{x}$	\wedge	$x \Leftrightarrow \bar{x}$	$y \vee \bar{z}$	\Rightarrow	F	<i>konj.</i>	<i>disj.</i>
1	1	1	1	0	0	0	1	1	0		$\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}$
1	1	0	1	0	0	0	1	1	0		$\bar{x} \vee \bar{y} \vee z$
1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	$x \wedge \bar{y} \wedge z$	
1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	$x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}$	
0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	$\bar{x} \wedge y \wedge z$	
0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	$\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}$	
0	0	1	0	1	0	0	0	1	0		$x \vee y \vee \bar{z}$
0	0	0	0	1	0	0	1	1	0		$x \vee y \vee z$

1. (a) $DNF = (x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z})$
 $KNF = (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) \wedge (x \vee y \vee \bar{z}) \wedge (x \vee y \vee z)$
- (b) $F_{min} = (\bar{y} \wedge x) \vee (\bar{x} \wedge y) = (\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge (x \vee y)$
2. (a) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$.
 $D = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{P}(D) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$
- (b) Treba pokazati da vrijedi $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ za skupove

$$A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 3, 4, 5\}, C = \{1, 4, 5\}.$$

$$A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3\} \cup \{4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\text{Dakle, } A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

3. (a)

	1	3	5
1	1	0	0
3	1	1	1
5	1	0	1

- (b) ρ je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna. (Pokazati!)
 ρ nije simetrična ni irefleksivna.
- (c) $\rho^d = \{(3, 1), (5, 1), (3, 5)\}$

II. grupa Linearna algebra

4. (a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

(b) $f(A) = A^2 - 3A - I$

$$f(A) = \begin{bmatrix} 15 & 22 & 47 \\ 16 & 24 & 54 \\ 17 & 16 & 49 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 9 & 12 \\ 3 & 12 & 15 \\ 6 & 3 & 18 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 13 & 35 \\ 13 & 11 & 39 \\ 11 & 13 & 30 \end{bmatrix}$$

(c) $A^{-1} = \frac{1}{22} \begin{bmatrix} 19 & -14 & -1 \\ 4 & 4 & -6 \\ -7 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ Rješenje sustava je $(-39, 8, 8)$.

5. (a) $\det(A) = 9$
(b) $r(A) = 4$ jer u A postoji submatrica reda 4 (to je A), čija je determinanta $\neq 0$.
6. $\left(p, 0, -\frac{2}{5} - p, \frac{3}{5}\right)$