Matematika - PITUP

– grupa **A** –

26.2.2013.

IME I PREZIME: ____________________________________

popunjava profesor:

ZADATAK	1.	2.	3.	4.	5.	6.	UKUPNO	OCJENA
BROJ BODOVA								

Uputa. U svakoj grupi zadataka treba za prolaznu ocjenu imati barem 10 bodova i ukupni broj bodova mora biti veći od 30.

I. grupa **Diskretna matematika**

1. Za zadanu funkciju algebre sudova

$$F(x,y,z) = [(x \Rightarrow \overline{y}) \vee (\overline{y} \vee z)] \wedge \overline{\overline{x} \Leftrightarrow z}.$$

odredite:

(a) semantičku tablicu, (5 bodova)

(b) minimizirajte funkciju, (3 boda)

(c) nacrtajte logički element. (2 boda)

Rješenje

(a) Semantička tablica:

			(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	F		
x	y	z	$x \Rightarrow \overline{y}$	$\overline{y} \vee z$	$(1) \vee (2)$	$\overline{x} \Leftrightarrow z$	$\neg(4)$	$(3) \wedge (5)$	baz. konj.	baz. disj.
1	1	1	0	1	1	0	1	1	$x \wedge y \wedge z$	
1	1	0	0	0	0	1	0	0		$\overline{x} \vee \overline{y} \vee z$
1	0	1	1	1	1	0	1	1	$x \wedge \overline{y} \wedge z$	
1	0	0	1	1	1	1	0	0		$\overline{x} \vee y \vee z$
0	1	1	1	1	1	1	0	0		$x \vee \overline{y} \vee \overline{z}$
0	1	0	1	0	1	0	1	1	$\overline{x} \wedge y \wedge \overline{z}$	
0	0	1	1	1	1	1	0	0		$x \vee y \vee \overline{z}$
0	0	0	1	1	1	0	1	1	$\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}$	

(b) Minimizacija:

$F_{min} = (x \wedge z) \vee (\overline{x} \wedge \overline{z}) = (\overline{x} \vee z) \wedge (x \vee \overline{z})$.

(c) Logički element: radni papiri.

2. (a) Provjerite da li vrijedi

$$C \times (A \cap B) = (C \times A) \cap (C \times B)$$

ako su $A = \{1,2,3\}, B = \{1,4,5\}, C = \{1,5\}$. (5 bodova)

(b) Neka je $D(x,y) :=$ "$x \cdot y$ je parno i djeljivo s 3", a univerzum razmatranja je

$$\mathcal{U} = \{1,6,15,18,20\}.$$

Ispišite tablicu predikata D i odredite istinitost sljedećih tvrdnji:

i. $\exists! x \forall y \, D(x,y)$,

ii. $\exists y \forall x\, D(x,y)$,

iii. $\exists y\, \neg D(20,y)$.

Sve svoje tvrdnje objasnite. (5 bodova)

Rješenje:

(a) $A \cap B = \{1\}$

$C \times (A \cap B) = \{(1,1),(5,1)\}$

$C \times A = \{(1,1),(1,2),(1,3),(5,1),(5,2),(5,3)\}$

$C \times B = \{(1,1),(1,4),(1,5),(5,1),(5,4),(5,5)\}$

$(C \times A) \cap (C \times B) = \{(1,1),(5,1)\}$

Dakle, vrijedi: $C \times (A \cap B) = (C \times A) \cap (C \times B)$.

(b)

$x \backslash y$	1	6	15	18	20
1	0	1	0	1	0
6	1	1	1	1	1
15	0	1	0	1	1
18	1	1	1	1	1
20	0	1	1	1	0

i. Tvrdnja $\exists! x \forall y\, D(x,y)$ nije istinita, jer vrijedi

$$v(D(6,y)) = 1,\ \forall y$$

$$v(D(18,y)) = 1,\ \forall y,$$

tj. imamo dva retka s jedinicama.

ii. Tvrdnja $\exists y \forall x\, D(x,y)$ je istinita jer postoji bar jedan stupac s jedinicama (to su stupci u kojima je $y = 6$ i $y = 18$).

iii. Tvrdnja $\exists y\, \neg D(20,y)$ je istinita, jer za $y = 20$ ili $y = 1$ je $v(D(20,20)) = 0$, odnosno $v(D(20,1)) = 0$.

3. Zadan je skup $A = \{-1,-2,-4,8,16\}$ i relacija ρ takva da je

$$x \rho y \Leftrightarrow \frac{x}{y} \in \mathbb{N}.$$

(a) Prikažite relaciju ρ grafički. (2 boda)

(b) Ispitajte da li je ρ relacija parcijalnog uređaja ili relacija ekvivalencije. (6 bodova)

(c) Napište komplement relacije ρ^c relacije ρ. (2 boda)

Rješenje:

(a) $\rho = \{(-1,-1),(-2,-1),(-4,-1),(-2,-2),(-4,-2),(-4,-4),(8,8),(16,8),(16,16)\}$.

Grafički prikaz - radni papiri.

(b) Relacija ρ je relacija parcijalnog uređaja. Vrijede svojstva: refleksivnost, antisimetričnost i tranzitivnost, a ne vrijedi simetričnost. Pokazati!!!

(c) $\rho^c = \{(-1,-2),(-1,-4),(-1,8),(-1,16),(-2,-4),(-2,8),(-2,16),(-4,8),(-4,16),(8,-1)$
$(8,-2),(8,-4),(8,16),(16,-1),(16,-2),(16,-4)\}$.

II. grupa **Linearna algebra**

4. Zadana je simetrična matrica A reda 4 sa

$$a_{ij} = |j - i|\,,\ \text{za } i \geq j.$$

(a) Ispišite matricu A. (2 boda)

(b) Zadan je polinom $f(x) = 4x^2 - x + 2$. Odredite $f(A)$. (3 boda)

(c) Odredite $\det\left(A^T \cdot A^{-1}\right) \cdot \det\left(\frac{1}{12}A^5\right)$. (5 bodova)

Rješenje:

(a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $f(A) = 4A^2 - A + 2I$

$$f(A) = 4 \cdot \begin{bmatrix} 14 & 8 & 4 & 4 \\ 8 & 6 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 4 & 8 & 14 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f(A) = \begin{bmatrix} 58 & 31 & 14 & 13 \\ 31 & 26 & 15 & 14 \\ 14 & 15 & 26 & 31 \\ 13 & 14 & 31 & 58 \end{bmatrix}$$

(c) $\det A = -12$

$\det\left(A^T \cdot A^{-1}\right) \cdot \det\left(\frac{1}{12}A^5\right) = -12.$

5. Zadane su matrice

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & b & 1 \\ 0 & 1 & b \end{bmatrix}, \ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \ D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

(a) Za koje sve realne brojeve b matrica B ima inverznu matricu? (3 boda)

(b) Za parametar $b = 3$:

- riješite matričnu jednadžbu $BX = D$, (5 bodova)
- odredite rang matrice B. (2 boda)

Rješenje:

(a) Regularne matrice imaju inverznu matricu, dakle da bi matrica B imala inverznu matricu mora vrijediti $\det B \neq 0$.

$\det B = b^2 - 2b + 1.$

$\det B \neq 0 \ \Rightarrow \ b^2 - 2b + 1 \neq 0 \ \Rightarrow \ b \neq 1.$

Za $b \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ matrica B ima inverznu matricu.

(b) $B^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 8 & -4 & -4 \\ -3 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$X = B^{-1} \cdot D = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 8 & -4 & -4 \\ -3 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\det B \neq 0 \ \Rightarrow \ r(B) = 3.$

6. Zadan je sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 &= 7 \\ -x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= -6 \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 12x_4 &= -2 \\ 2x_1 + 6x_2 - 8x_3 - x_4 &= 12 \end{aligned}$$

(a) Gaussovim postupkom odredite opće rješenje sustava tako da x_3 bude parametar. (8 bodova)

(b) Odredite ono posebno rješenje uz koje je suma komponenti rješenja jednaka nuli. (2 boda)

Rješenje:

(a) $(3+p, 1+p, p, 0)$.

(b) Za $p = -\frac{4}{3}$, dobivamo posebno rješenje $\left(\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, 0\right)$ čija je suma komponeti rješenja jednaka 0.