Matematika - PITUP

16.4.2013.

IME I PREZIME: ______________________________

popunjava profesor:

ZADATAK	1.	2.	3.	4.	5.	6.	UKUPNO	OCJENA
BROJ BODOVA								

Uputa. U svakoj grupi zadataka treba za prolaznu ocjenu imati barem 10 bodova i ukupni broj bodova mora biti veći od 30.

I. grupa **Diskretna matematika**

1. Za zadanu funkciju algebre sudova

$$F\left(x,y,z\right)=\left[\,\overline{x\Rightarrow\overline{y}}\wedge\left(y\wedge\overline{z}\right)\right]\vee\left(\overline{x}\Leftrightarrow z\right).$$

odredite:

(a) semantičku tablicu, (5 bodova)

(b) minimizirajte funkciju, (3 boda)

(c) nacrtajte logički element. (2 boda)

Rješenje

(a) Semantička tablica:

				(1)	(2)	(3)	(4)	F		
x	y	z	$x\Rightarrow\overline{y}$	$\neg(x\Rightarrow\overline{y})$	$y\wedge\overline{z}$	$\overline{x}\Leftrightarrow z$	$(1)\wedge(2)$	$(4)\vee(3)$	baz. konj.	baz. disj.
1	1	1	0	1	0	0	0	0		$\overline{x}\vee\overline{y}\vee\overline{z}$
1	1	0	0	1	1	1	1	1	$x\wedge y\wedge\overline{z}$	
1	0	1	1	0	0	0	0	0		$\overline{x}\vee y\vee\overline{z}$
1	0	0	1	0	0	1	0	1	$x\wedge\overline{y}\wedge\overline{z}$	
0	1	1	1	0	0	1	0	1	$\overline{x}\wedge y\wedge z$	
0	1	0	1	0	1	0	0	0		$x\vee\overline{y}\vee z$
0	0	1	1	0	0	1	0	1	$\overline{x}\wedge\overline{y}\wedge z$	
0	0	0	1	0	0	0	0	0		$x\vee y\vee z$

(b) Minimizacija:

$F_{min}=(x\vee z)\wedge(\overline{x}\vee\overline{z})=(\overline{x}\wedge z)\vee(x\wedge\overline{z})$.

(c) Logički element: radni papiri.

2. (a) Provjerite da li vrijedi

$$(A\times C)\cap(A\times B)=A\times(C\cap B)$$

ako su $A=\{d,5\}$, $B=\{d,4,5\}$, $C=\{d,2,3\}$. (5 bodova)

(b) Neka je $Q(x,y):=$ ”$x\cdot y$ je višekratnik broja 6”, a univerzum razmatranja je

$$\mathcal{U}=\{1,12,15,24,26\}.$$

Ispišite tablicu predikata Q i odredite istinitost sljedećih tvrdnji:

i. $\exists!x\forall y\,Q(x,y)$,

ii. $\exists y\forall x\,Q(x,y)$,

iii. $\exists y\, \neg Q(26, y)$.

Sve svoje tvrdnje objasnite. (5 bodova)

Rješenje:

(a) $C \cap B = \{d\}$

$A \times (C \cap B) = \{(d, d), (5, d)\}$

$A \times C = \{(d, d), (d, 2), (d, 3), (5, d), (5, 2), (5, 3)\}$

$A \times B = \{(d, d), (d, 4), (d, 5), (5, d), (5, 4), (5, 5)\}$

$(A \times C) \cap (A \times B) = \{(d, d), (5, d)\}$

Dakle, vrijedi: $(A \times C) \cap (A \times B) = A \times (C \cap B)$.

(b)

$x \backslash y$	1	12	15	24	26
1	0	1	0	1	0
12	1	1	1	1	1
15	0	1	0	1	1
24	1	1	1	1	1
26	0	1	1	1	0

i. Tvrdnja $\exists! x \forall y\, Q(x, y)$ nije istinita, jer vrijedi

$$v(Q(12, y)) = 1, \forall y$$

$$v(Q(24, y)) = 1, \ \forall y,$$

tj. imamo dva retka s jedinicama.

ii. Tvrdnja $\exists y \forall x\, Q(x, y)$ je istinita jer postoji bar jedan stupac s jedinicama (to su stupci u kojima je $y = 12$ i $y = 24$).

iii. Tvrdnja $\exists y\, \neg Q(26, y)$ je istinita, jer za $y = 26$ ili $y = 2$ je $v(Q(26, 26)) = 0$, odnosno $v(Q(26, 2)) = 0$.

3. Zadan je skup $A = \{-1, -3, -6, 5, 10\}$ i relacija

$$R = \{(x, y) : \frac{y}{x} \text{ je prirodan broj}\}.$$

(a) Prikažite relaciju R pomoću lukova i vrhova. (2 boda)

(b) Ispitajte da li je R relacija parcijalnog uređaja ili relacija ekvivalencije. (6 bodova)

(c) Napišite dualnu relaciju R^d relacije R. (2 boda)

Rješenje:

(a) $R = \{(-1, -1), (-1, -3), (-1, -6), (-3, -3), (-3, -6), (-6, -6), (5, 5), (5, 10), (10, 10)\}$.
Grafički prikaz - radni papiri.

(b) Relacija R je relacija parcijalnog uređaja. Vrijede svojstva: refleksivnost, antisimetričnost i tranzitivnost, a ne vrijedi simetričnost. Pokazati!!!

(c) $R^d = \{(5, -1), (10, -1), (-1, -3), (5, -3), (10, -3), (-1, -6), (-3, -6), (5, -6), (10, -6), (-1, 5), (-3, 5)$
$(-6, 5), (-1, 10), (-3, 10), (-6, 10), (5, 10)\}$.

II. grupa **Linearna algebra**

4.

4. Zadana je kvadratna matrica $A(a_{ij})$ trećeg reda na sljedeći način

$$a_{ij} = 3i - 2j, \quad \text{za sve} \ \ i, j \text{ takve da je } \ j \geq i.$$

(a) Ispišite matricu A tako da bude simetrična. (3 boda)

(b) Zadan je polinom $f(x) = -x^2 + 3x - 1$. Odredite matricu $f(A)$ pri čemu je A zadana matrica u (a) dijelu zadatka. (3 boda)

(c) Odredite $\det\left(3 \cdot (f(A))^{-1} \cdot A^T\right)$ za matrice A i $f(A)$ iz (a) i (b) dijela zadatka. (4 boda)

Rješenje:

(a) $$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(b) $f(A) = -A^2 + 3A - I$

$$f(A) = -\begin{bmatrix} 11 & -3 & -12 \\ -3 & 5 & 3 \\ -12 & 3 & 18 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f(A) = \begin{bmatrix} -9 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 3 & -3 & -10 \end{bmatrix}$$

(c) $\det A = -15$, $\det f(A) = 81$

$\det\left(3 \cdot (f(A))^{-1} \cdot A^T\right) = -5.$

5. Zadane su matrice

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & b \\ 0 & b & 3 \end{bmatrix}, \; X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \; D = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

(a) Za koje sve realne brojeve b je matrica B regularna? (3 boda)

(b) Za parametar $b = 1$ riješite matričnu jednadžbu $BX = D$. (5 bodova)

(c) Za parametar $b = 3$ odredite rang matrice B. (2 boda)

Rješenje:

(a) Regularne matrice imaju determinantu različitu od nule, tj. $\det B \neq 0$.

$\det B = -b^2 + 2b - 3$.

$\det B \neq 0 \;\Rightarrow\; -b^2 + 2b - 3 \neq 0 \;\Rightarrow\; b_1 \neq 3,\; b_2 \neq -1.$

Za $b \in \mathbb{R} \backslash \{-1, 3\}$ matrica B je regularna.

(b) $$B^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 8 & -4 & -4 \\ -3 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = B^{-1} \cdot D = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 8 & -4 & -4 \\ -3 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix}.$$

(c) $r(B) = 2.$

6. Zadan je sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 - x_3 - 6x_4 &= -1 \\ 2x_1 + 6x_2 - 8x_3 - x_4 &= 12 \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 &= -7 \\ -x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= -6 \end{aligned}$$

(a) Gaussovim postupkom odredite opće rješenje sustava tako da x_2 bude parametar. (8 bodova)

(b) Odredite ono posebno rješenje uz koje je suma komponenti rješenja jednaka 0. (2 boda)

Rješenje:

(a) $(p+2, p, p-1, 0)$.

(b) Za $p = -\frac{1}{3}$, dobivamo posebno rješenje $\left(\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, 0\right)$ čija je suma komponeti rješenja jednaka 0.