PITUP

Matematika

12.12.2012.

– pismeni ispit –

IME I PREZIME: ______________________________

popunjava profesor:

ZADATAK	1.	2.	3.	4.	5.	6.	UKUPNO	OCJENA
BROJ BODOVA								

Uputa. U svakoj grupi zadataka treba za prolaznu ocjenu imati barem 10 bodova i ukupni broj bodova mora biti veći od 30.

I. grupa **Diskretna matematika**

1. Za zadanu funkciju algebre sudova

$$F(x, y, z) = \overline{z \vee \overline{x}} \Leftrightarrow \left(\overline{\overline{x} \vee y} \Rightarrow \overline{z}\right).$$

odredite:

(a) semantičku tablicu, (5 bodova)

(b) minimizirajte funkciju, (3 boda)

(c) nacrtajte logički element. (2 boda)

Rješenje

(a) Semantička tablica:

				(1)		(2)	(3)		
x	y	z	$z \vee \overline{x}$	$\neg(z \vee \overline{x})$	$\overline{x} \vee y$	$\neg(\overline{x} \vee y)$	$(2) \Rightarrow \overline{z}$	$(1) \Leftrightarrow (3)$	baz. konjunkcije
1	1	1	1	0	1	0	1	0	
1	1	0	0	1	1	0	1	1	$x \wedge y \wedge \overline{z}$
1	0	1	1	0	0	1	0	1	$x \wedge \overline{y} \wedge z$
1	0	0	0	1	0	1	1	1	$x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}$
0	1	1	1	0	1	0	1	0	
0	1	0	1	0	1	0	1	0	
0	0	1	1	0	1	0	1	0	
0	0	0	1	0	1	0	1	0	

(b) Minimizacija:

$$\begin{aligned} F_{min} &= (x \wedge y \wedge \overline{z}) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge z) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}) \\ &= (x \wedge y \wedge \overline{z}) \vee (x \wedge \overline{y}) \\ &= x \wedge ((y \wedge \overline{z}) \vee \overline{y}) \\ &= x \wedge (\overline{y} \vee \overline{z}) \end{aligned}$$

(c) Logički element:

2. (a) Zadan je predikat $Q(x, y) :=$ "$|x - 2y|$ *je paran broj*" i univerzum razmatranja $\mathcal{U} = \{4, 7, 8, 11, 12\}$. Napišite tablicu predikata P na univerzumu $\mathcal{U}$ i ispitajte istinitost sljedećih tvrdnji:

i. $\exists!\, y\, Q(8, y)$

ii. $\exists x \, \forall y \, \neg \, Q(x,y)$

iii. $\exists y \, \forall x \, Q(x,y)$

Sve svoje tvrdnje detaljno objasnite. (5 bodova)

(b) Zadani su skupovi $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - x - 2 \leq 0\}$ i $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 - x > 0\}$.
Odredite skupove A, B, $\mathcal{P}(B)$ i $A \triangle B$ pri čemu je $X \triangle Y = (X \cup Y) \backslash (X \cap Y)$ simetrična razlika skupova X i Y, a $\mathcal{P}(X)$ je partitivni skup skupa X. (5 bodova)

Rješenje

(a)

$x \backslash y$	4	7	8	11	12
4	1	1	1	1	1
7	0	0	0	0	0
8	1	1	1	1	1
11	0	0	0	0	0
12	1	1	1	1	1

i. Netočno, jer za $x = 8$ postoje npr. $y_1 = 4$ i $y_2 = 7$ tako da vrijede predikati $P(8,4)$ i $P(8,7)$.

ii. Točno, jer postoji redak u kojem su sve nule, npr. redak gdje je $x = 7$.

iii. Netočno, jer ne postoji stupac s jedinicama.

(b) $A = \{-1, 0, 1, 2\}$

$B = \{1, 2, 3\}$,

$A \cup B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$,

$A \cap B = \{1, 2\}$,

$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{-1, 0, 3\}$,

$\mathcal{P}(A \cap B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$.

3. Na skupu $A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ zadana je relacija ρ na sljdeći način

$$(x, y) \in \rho \Leftrightarrow \; x \leq y.$$

(a) Prikažite relaciju pomoću vrhova i lukova. (2 boda)

(b) Odredite komplement relacije ρ. (2 boda)

(c) Ispitajte da li je ρ relacija parcijalnog uređaja ili relacija ekvivalencije. (4 boda)

(d) Ispitajte da li je relacija ρ komlpeltna i/ili strogo kompletna. (2 boda)

Rješenje

(a) Graf relacije:

(b) $\rho^c = \{(4,3), \, (5,3), \, (5,4), \, (6,3) \, (6,4) \, (6,5) \, (7,3) \, (7,4) \, (7,5) \, (7,6) \, (8,3) \, (8,4) \, (8,5) \, (8,6) \, (8,7)\}$.

(c) ρ je relacija parcijalnog uređaja, jer vrijedi

refleksivnost: $\forall x \in A$,vrijedi $\{(3,3), \, (4,4), \, (5,5), \, (6,6), \, (7,7), \, (8,8)\} \subseteq \rho$, ili $\forall x \in A \; x \leq x$ je istina

antisimetričnot: $\forall x, y \in A \; x \leq y \; \wedge \; y \leq x \; \Rightarrow x = y$,

tranzitivnost: $\forall x, y, z \in A \; x \leq y \; \wedge \; y \leq z \; \Rightarrow \; x \leq z$.

Napomena: antisimetričnost i tranzitivnost se također mogu pokazati provjeravanjem svojstava na parovima elemenata.

(d) Relacija ρ strogo kompletna jer $\forall x, y \in A$ vrijedi $\; x \leq y \; \vee \; y \leq x$, tj. svaka dva broja su uvijek usporediva.
ρ je kompletna jer $\forall x, y \in A, \; x \neq y$ vrijedi $\; x \leq y \; \vee \; y \leq x$, tj. svaka dva različita broja su usporediva.

II. grupa **Linearna algebra**

4. (a) Zadana je matrica

$$B = \begin{bmatrix} a & (a+b)^2 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \\ b & a^2+b & 3 \end{bmatrix}.$$

Odredite parametre a i b tako da je matrica B simetrična te ispišite dobivene matrice. (4 boda)

(b) Zadana je matrica

$$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Riješite matričnu jednadžbu

$$(A^{-1})^{-1}X - 2I = 2AX.$$

(6 bodova)

Rješenje

(a) Zadana matrica je simetrična ako je $(a+b)^2 = 4$, $b = 0$ i $a^2 + b = 4$, tj. dobivamo

- matricu B_1 za vrijednosti parametara $a_1 = 2$ i $b = 0$,

$$B_1 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

- te matricu B_2 za vrijednosti parametara za $a_2 = -2$ i $b = 0$.

$$B_2 = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

(b) $(A^{-1})^{-1}X - 2I = 2AX$
$AX - 2I = 2AX$
$A^{-1} \cdot / \quad AX = -2I$
$X = -2A^{-1}$

$$X = -2 \cdot \frac{3}{2}\begin{bmatrix} -4 & -6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 18 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

5. Zadana je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Izračunajte:
   i. $\det A$, (4 boda)
   ii. $\det(5A^{-1})$. (1 bod)

(b) Ako postoji, izračunajte inverznu matricu matrice A. (5 bodova)

Rješenje:

(a) i. $\det A = 5$.

ii. $\det(5A^{-1}) = \dfrac{5^4}{\det A} = \dfrac{5^4}{5} = 5^3 = 125.$

(b) A^{-1} postoji jer je $\det A \neq 0$. A^{-1} odredimo Gaussovim postupkom.

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 7 & -15 & 5 & -3 \\ -10 & 20 & -5 & 5 \\ 9 & -20 & 5 & -1 \\ -8 & 20 & -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} & -3 & 1 & -\frac{3}{5} \\ -2 & 4 & -1 & 1 \\ \frac{9}{5} & -4 & 1 & -\frac{1}{5} \\ -\frac{8}{5} & 4 & -1 & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

6. Zadan je sustav

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 2 \end{aligned} .$$

(a) Cramerovim pravilom riješite sustav. (5 bodova)

(b) Gaussovim postupkom riješite sustav. (5 bodova)

Rješenje

(a) Determinanta sustava $D = 0$ i $D_1 = 0,\ D_2 = 0,\ D_3 = 0$ te je sustav neodređen ili kontradiktoran.

(b) Sustav je kontradiktoran.