PITUP

Matematika

05.02.2013.

– Rješenja –

IME I PREZIME: ______________________________

popunjava profesor:

ZADATAK	1.	2.	3.	4.	5.	6.	UKUPNO	OCJENA
BROJ BODOVA								

Uputa. U svakoj grupi zadataka treba za prolaznu ocjenu imati barem 10 bodova i ukupni broj bodova mora biti veći od 30.

I. grupa **Diskretna matematika**

1. Za zadanu funkciju algebre sudova

$$F(x, y, z) = (\overline{y} \wedge \overline{z}) \Leftrightarrow (y \wedge (\overline{x} \vee \overline{z})).$$

odredite:

(a) semantičku tablicu, (5 bodova)

Rj:

x	y	z	F	b.d.
1	1	1	1	$x \wedge y \wedge z$
1	1	0	0	
1	0	1	1	$x \wedge \overline{y} \wedge z$
1	0	0	0	
0	1	1	0	
0	1	0	0	
0	0	1	1	$\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z$
0	0	0	0	

(b) minimizirajte funkciju, (3 boda)

Rj: DNF:$(x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge z) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z)$

$$\begin{aligned} F_{min} &= [(x \wedge z) \wedge (y \vee \overline{y})] \vee [(\overline{y} \wedge z) \wedge (x \vee \overline{x})] \\ &= [(x \wedge z) \wedge 1] \vee [(\overline{y} \wedge z) \wedge 1] \\ &= (x \wedge z) \vee (\overline{y} \wedge z) \\ &= z \wedge (x \vee \overline{y}) \end{aligned}$$

(c) nacrtajte logički element. (2 boda)

2. Neka su zadani skupovi $K = \{x \,|\, x^2 - x - 6 = 0\}$, $L = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, -2.7 \leq x < 4\}$ i $M = \{x \in \mathbb{N} \,|\, |x - 1| < 3\}$.

(a) Ispišite elemente skupova K, L, M. (3 boda)

Rj: $K = \{-2, 3\}, \quad L = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}, \quad M = \{1, 2, 3\}$

(b) Odredite skup $L \backslash (K \cap M)$. (2 boda)

Rj: $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\} \backslash \{3\} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

(c) Na univerzumu razmatranja $\mathcal{U} = \{6, 7, 8, 9\}$ je zadan predikat $P(x, y) =$ "$x \leq y$ i y je neparan broj."
Ispišite matricu predikata P te odredite istinitost sljedećih sudova:

Rj: Matrica predikata:

$x\backslash y$	6	7	8	9
6	0	1	0	1
7	0	1	0	1
8	0	0	0	1
9	0	0	0	1

i. $\exists! y\, P(8, y)$,

Rj: Sud je *istinit* jer za $x = 8$, samo je jedan y koji zadovoljava predikat ($y = 9$).

ii. $\exists y\, \forall x\, P(x, y)$.

Rj: Sud je *istinit* jer postoji stupac ispunjen jedinicama ($y = 9$).

Svoje tvrdnje obrazložite. (5 bodova)

3. Na skupu $A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ zadana je relacija ρ na sljdeći način

$$(x, y) \in \rho \Leftrightarrow \; x \leq y.$$

(a) Ispišite matricu incidencije te prikažite relaciju pomoću vrhova i lukova. (4 boda)

(b) Odredite komplement relacije ρ. (1 bod)

Rj: $\rho^c = \{(4, 3), (5, 3), (5, 4), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (7, 3), (7, 4), (7, 5), (7, 6),$
$(8, 3), (8, 4), (8, 5), (8, 6), (8, 7)\}$

(c) Ispitajte da li je ρ relacija parcijalnog uređaja ili relacija ekvivalencije. (4 boda)

Rj: *refleksivnost:* $x \leq x$

antisimetrinost: $x \leq y \wedge y \leq x$ i oito je da iz toga slijedi $x = y$

tranzitivnost: $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq y \leq z \Rightarrow x \leq z$

(d) Ispitajte da li je relacija ρ strogo kompletna. (1 bod)

Rj: Relacija ρ je strogo kompletna jer $\forall x, y \in A$ vrijedi $\; x \leq y \;\vee\; y \leq x$, tj. svaka dva broja su uvijek usporediva.

II. grupa **Linearna algebra**

4. Zadana je matrica

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Odredite vrijednost determinante matrice H. (6 bodova)

Rj: $\det H = 2$

(b) Odredite vrijednost izraza

$$\det\left(\frac{1}{2} H^T\right) - 3 \det\left(H^2\right). \qquad \text{(4 boda)}$$

Rj: $\det\left(\frac{1}{2} H^T\right) - 3 \det\left(H^2\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \det H - 3(\det H)^2 = -\frac{95}{2}$

5. Zadana je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Odredite inverznu matricu A^{-1}. (5 bodova)

Rj:

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ -4 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

(b) Riješite matričnu jednadžbu $3AX - 4I = A(I + 2X)$. (5 bodova)

Rj: $X = I + 4A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -4 & 3 & 6 \\ -8 & -2 & 11 \end{bmatrix}$

6. Zadan je sustav

$$\begin{aligned} (k+2)x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + (2k+1)x_2 - x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(a) Odredite vrijednost parametra k tako da sustav ima i netrivijalnih rješenja. (5 bodova) *(Uputa: Primijenite Roucheov teorem.)*

Rj: $\det A = 0 \Rightarrow 2k - 2k^2 = 0 \Rightarrow k = 0, 1$

(b) Za vrijednost parametra $k = 1$ nađite opće rješenje sustava Gaussovim postupkom. (5 bodova)

Rj: x_3 parametar: $(0, \frac{1}{3}p, p)$
x_2 parametar: $(0, p, 3p)$