Matematika

PITUP Križevci

26.02.2016.

– pismeni ispit –

**popunjava profesor:**

| ZADATAK | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | UKUPNO | OCJENA |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| BROJ BODOVA | | | | | | | | |

**Uputa.** U svakoj grupi zadataka treba za prolaznu ocjenu imati barem 10 bodova i ukupni broj bodova mora biti veći od 30.

I. grupa **Matematička logika, skupovi, relacije, funkcije**

1. Zadana je funkcija algebre sudova formulom

$$F(x,y,z) = ((\overline{y} \wedge \overline{z}) \Rightarrow (x \wedge z)) \Leftrightarrow (y \wedge (\overline{x} \vee \overline{z})).$$

   (a) Izradite semantičku tablicu za funkciju $F$. (4 boda)
   (b) Napišite obje normalne forme funkcije $F$. (2 boda)
   (c) Minimizirajte jednu od normalnih formi funkcije. (4 boda)

2. Neka je $S = \{p, e, t, a, k\}$. Na $S$ je zadana relacija $R$ matricom incidencije

| $R$ | $p$ | $e$ | $t$ | $a$ | $k$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| $e$ | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $t$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| $a$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $k$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

   (a) Prikažite relaciju $R$ grafom, pomoću vrhova i lukova. (2 boda)
   (b) Odredite obrat relacije $R$. (2 boda)
   (c) Ispitajte koja od svojstava: refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost i tranzitivnost ispunjava relacija $R$. (4 boda)
   (d) Da li je relacija $R$ relacija parcijalnog uređaja? Da li je $R$ relacija ekvivalencije? Objasnite odgovore. (2 boda)

3. Zadani su skupovi $A = \{x \in \mathbb{N} : |x| < 4\}$ i $B = \{x \in \mathbb{Z} : -1 \leq x < 3\}$.

   (a) Odredite elemente skupova $A$ i $B$. (2 boda)
   (b) Odredite $D = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. (3 boda)
   (c) Zadan je predikat $P(x) =$ "$2x^2 - 3 > 0$". Ako je $\mathcal{U} = \{-1, 1, 3, 5\}$, odredite istinitost sljedećih sudova:
      i. $\forall x P(x)$, (1 bod)
      ii. $\exists x P(x)$, (1 bod)
      iii. $\exists! x P(x)$, (1 bod)
      iv. $\forall x \neg P(x)$, (1 bod)
      v. $\exists! x \neg P(x)$, (1 bod)

II. grupa **Linearna algebra**

4. Zadane su matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

   (a) Odredite $AB$ i $BA$. Ako nije moguće, objasnite zašto. (3 boda)

   (b) Odredite $A^{-1}$. (4 boda)

   (c) Riješite matričnu jednadžbu (3 boda)

$$A^{-1}(XA - 3I) = O$$

5. Dan je sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 0 \\ -x - 2y + 2z &= -6 \\ x + 2y - z &= 5 \end{aligned}$$

   (a) Riješite sustav pomoću determinanti primjenom Cramerovog pravila. (5 bodova)

   (b) Riješite sustav Gaussovim postupkom. (5 bodova)

6. Dan je sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 3x_2 - x_3 + 5x_4 &= 6 \\ 2x_1 - 2x_2 + 6x_4 &= 8 \\ 3x_1 + 8x_3 + 5x_4 &= 18 \end{aligned}$$

   (a) Odredite opće rješenje zadanog sustava Gaussovim postupkom tako da nepoznanica $x_2$ bude parametar. (8 bodova)

   (b) Odredite 2 bazična rješenja. (2 boda)

1. (a) Semantička tablica:

| x | y | z | $\overline{y} \wedge \overline{z}$ | $x \wedge z$ | $(\overline{y} \wedge \overline{z}) \Rightarrow (x \wedge z)$ | $\overline{x} \vee \overline{z}$ | $y \wedge (\overline{x} \vee \overline{z})$ | F | baz. disj. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | $\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}$ |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | $\overline{x} \vee y \vee \overline{z}$ |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | $x \vee y \vee \overline{z}$ |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | |

   (b) KNF$=(\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}) \wedge (\overline{x} \vee y \vee \overline{z}) \wedge (x \vee y \vee \overline{z})$
   DNF$=(x \wedge y \wedge \overline{z}) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}) \vee (\overline{x} \wedge y \wedge z) \vee (\overline{x} \wedge y \wedge \overline{z}) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge \overline{z})$

   (c) $F_{min} = \overline{z} \vee (\overline{x} \wedge y)$

2. (a) Graf:

   (b) $\overline{R} = \{(p,p),(e,p),(a,p),(e,e),(t,e),(a,e),(k,e),(t,t),(a,t),(a,a),(k,a),(k,k)\}$

   (c) refleksivnost: Da, $(p,p),(e,e),(t,t),(a,a),(k,k) \in R$
   simetričnost: Ne, protuprimjer $x = p$, $y = a$
   antisimetričnost: Da, jednostruki lukovi u grafu, ili gornjetrokutasta matrica incidencije.
   tranzitivnost: Ne, $(p,a) \in R \wedge (a,k) \in R$ ali $(p,k) \notin R$

   (d) Niti jedno niti drugo jer nije tranzitivna.

3. (a) $A = \{1,2,3\}$ $\quad B = \{-1,0,1,2\}$

   (b) $A \setminus B = \{3\}$ $\quad B \setminus A = \{-1,0\}$ $\quad D = \{-1,0,3\}$

   (c)

| $x$ | $-1$ | $1$ | $3$ | $5$ |
|---|---|---|---|---|
| $P(x)$ | $\perp$ | $\perp$ | $\top$ | $\top$ |

   i. $\forall x P(x)$: $\perp$, npr. za $x = 1$
   ii. $\exists x P(x)$: $\top$, npr. za $x = 3$
   iii. $\exists! x P(x)$: $\perp$, postoje dva, $x = 3$ i $x = 5$
   iv. $\forall x \neg P(x)$: $\perp$, npr. za $x = 3$
   v. $\exists! x \neg P(x)$: $\perp$, postoje dva, $x = -1$ i $x = 1$

4. (a) $AB =$-, nije definirano jer matrice nisu ulančane $(3,3)(2,3)$
   $$BA = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -1 & 9 & 5 \end{bmatrix}$$

   (b) $$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 3 & -6 & -2 \end{bmatrix}$$

   (c) $$X = 3A^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & -9 & -3 \\ 6 & -12 & -3 \\ -9 & 18 & 6 \end{bmatrix}$$

5. (a) $D = -7$, $D_1 = -14$, $D_2 = -7$, $D_3 = 7$. Rješenje je $(2,1,-1)$.

   (b) Rješenje je $(2,1,-1)$.

6. (a) $$\left(-\frac{1}{2} + \frac{13}{4}p, p, \frac{3}{2} - \frac{3}{4}p, \frac{3}{2} - \frac{3}{4}p\right), p \in \mathbb{R}$$

   (b) Bazična rješenja su: $\left(0, \frac{2}{13}, \frac{18}{13}, \frac{18}{13}\right)$ $\quad \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ $\quad (6,2,0,0)$