Matematika

PITUP Križevci

22.05.2015.

– pismeni ispit –

IME I PREZIME: ______________________________

popunjava profesor:

ZADATAK	1.	2.	3.	4.	5.	6.	UKUPNO	OCJENA
BROJ BODOVA								

Uputa. U svakoj grupi zadataka treba za prolaznu ocjenu imati barem 10 bodova i ukupni broj bodova mora biti veći od 30.

I. grupa **Matematička logika, skupovi, relacije, funkcije**

1. Zadana je funkcija algebre sudova formulom

$$F(x, y, z) = ((y \Rightarrow x) \wedge z) \Leftrightarrow (\bar{x} \vee z).$$

(a) Izradite semantičku tablicu za funkciju F. (5 bodova)

(b) Ispišite obje normalne forme zadane funkcije F. (1 bod)

(c) Minimizirajte funkciju. (4 boda)

2. (a) Zadani su skupovi

$$M = \{x : (3x+2)(2x-4)(x^2-1) = 0, x \in \mathbb{N}\}$$

$$\text{i} \qquad N = \{x : x \in \langle -2, 3], x \in \mathbb{Z}\}.$$

Odredite elemente skupova M, N i $M \triangle N = (M \setminus N) \cup (N \setminus M)$. (4 boda)

(b) Zadan je predikat

$$P(x, y) = \text{"}(x > 0) \vee (x^2 \geq y^2)\text{"}.$$

Ako je univerzum razmatranja $\mathcal{U} = \{-3, -2, 0, 4\}$, napišite tablicu predikata. (2 boda)

Odredite istinitost sljedećih tvrdnji (odgovore obrazložite): (4 boda)

i. $\forall x \exists y P(x, y)$,

ii. $\exists x \forall y P(x, y)$,

iii. $\exists y \forall x \neg P(x, y)$

3. Na skupu $S = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ zadana je relacija

$$x \; \tau \; y \;\Leftrightarrow\; |x - y| \text{ je djeljiv s } 3$$

(a) Ispišite elemente relacije te relaciju prikažite pomoću vrhova i lukova. (3 boda)

(b) Ispišite elemente obrata relacije. (1 bod)

(c) Ispitajte da li je τ relacija ekvivalencije ili relacija parcijalnog uređaja. (Provjerite sva potrebna svojstva.) (6 bodova)

II. grupa **Linearna algebra**

4. Zadane su matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

   (a) Odredite inverznu matricu A^{-1} matrice A. (4 boda)

   (b) Riješite matričnu jednadžbu

$$I - XA = (BA^{-1} + 2X)A. \quad \text{(6 bodova)}$$

5. Zadan je sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 &= 7 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 - 6x_4 &= -1 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 &= 6 \\ 3x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 5x_4 &= 13 \end{aligned}$$

   (a) Riješite sustav Gaussovim postupkom tako da x_3 bude parametar. (7 bodova)

   (b) Pronađite sva bazična rješenja. (3 boda)

6. Dan je sustav

$$\begin{aligned} -2x_1 - 3x_2 + x_3 &= -3 \\ -x_2 + 2x_3 &= 2 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 &= -3 \end{aligned}$$

   (a) Riješite sustav Cramerovim pravilom. (6 bodova)

   (b) Odredite rang matrice sustava $r(A)$? Odredite $r(A_p)$, rang proširene matrice sustava? (4 boda)

Rješenja:

1. (a) Semantička tablica:

x	y	z	$y \Rightarrow x$	$(y \Rightarrow x) \wedge z$	$\bar{x}$	$\bar{x} \vee z$	F	baz. disj.	baz.konj.
1	1	1	1	1	0	1	1		$x \wedge y \wedge z$
1	1	0	1	0	0	0	1		$x \wedge y \wedge \bar{z}$
1	0	1	1	1	0	1	1		$x \wedge \bar{y} \wedge z$
1	0	0	1	0	0	0	1		$x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}$
0	1	1	0	0	1	1	0	$x \vee \bar{y} \vee \bar{z}$	
0	1	0	0	0	1	1	0	$x \vee \bar{y} \vee z$	
0	0	1	1	1	1	1	1		$\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z$
0	0	0	1	0	1	1	0	$x \vee y \vee z$	

(b) $KNF = (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (x \vee \bar{y} \vee z) \wedge (x \vee y \vee z)$
$DNF = (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z)$

(c) $F_{min} = \bar{x} \wedge (y \vee \bar{z})$

2. (a) $M = \{1, 2\} \quad N = \{-1, 0, 1, 2, 3\} \quad M \triangle N = \{- - 1, 0, 3\}$

(b) Tablica predikata:

$x \setminus y$	-3	-2	0	4
-3	1	1	1	0
-2	0	1	1	0
0	0	0	1	0
4	1	1	1	1

Tvrdnja $\forall x \exists y P(x, y)$ je istinita npr. $y = 0$.
Tvrdnja $\exists x \forall y P(x, y)$ je istinita npr. $x = 4$.
Tvrdnja $\exists x \forall y \neg P(x, y)$ nije istinita, zbog $y = 0$.

3. (a) $\tau = \{(1.1), (1, 4), (2, 2), (3, 3), (3, 6), (4, 1), (4, 4), (6, 3), (6, 6)\}$

$x \setminus y$	1	2	3	4	6
1	1	0	0	1	0
2	0	1	0	0	0
3	0	0	1	0	1
4	1	0	0	1	0
6	0	0	1	0	1

(b) $\overline{\tau} = \{(1.1), (1, 4), (2, 2), (3, 3), (3, 6), (4, 1), (4, 4), (6, 3), (6, 6)\}$

(c) To je relacija ekvivalencije.

- refleksivnost: vrijedi jer $|x - x| = 0$
- antisimetričnost: ne vrijedi jer elementi $(1, 4)$ i $(4, 1)$ pripadaju relaciji, a ne vrijedi $1 = 4$.
- tranzitivnost: vrijedi jer $|x - z| = |x - y + y - z| = 3k + 3l$
- relacija je simetrična
  ako je $|x - y|$ djeljiv s 3 onda je i $|y - x|$ $(= |x - y|)$ djeljiv s 3.

4. (a) $A^{-1} = \frac{1}{-4} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -5 \\ -4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

(b) $X = (I - B)A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ -6 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{-4} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -5 \\ -4 & 0 & 4 \end{bmatrix} =$

$= \frac{1}{-4} \begin{bmatrix} -14 & -10 & 26 \\ 6 & 2 & -6 \\ -17 & 13 & 15 \end{bmatrix}$

5. (a) Rješenje sustava je $(3 + p, 1 + p, p, 0), p \in \mathbb{R}$.

(b) $(0, -2, -3, 0), \ (2, 0, -1, 0), \ (3, 1, 0, 0)$

6. (a) $D = 16$, $D_1 = 32$, $D_2 = 0$, $D_3 = 16$, rješenje je $(2, 0, 1)$.

(b) $r(A) = 3$ jer je $D = \det A \neq 0$.
$r(A_p) = 3$ po Kronecker Capellijevom teoremu.