Matematika

PITUP

15.09.2015.

– pismeni ispit –

popunjava profesor:

ZADATAK	1.	2.	3.	4.	5.	6.	UKUPNO	OCJENA
BROJ BODOVA								

Uputa. U svakoj grupi zadataka treba za prolaznu ocjenu imati barem 10 bodova i ukupni broj bodova mora biti veći od 30.

I. grupa **Matematička logika, skupovi, relacije, funkcije**

1. Zadana je funkcija algebre sudova

$$F(x,y,z) = (\overline{z} \Rightarrow y) \Leftrightarrow (y \wedge (\overline{x} \vee \overline{z}))\,.$$

(a) Izradite semantičku tablicu. (5 bodova)

(b) Napišite obje normalne forme zadane funkcije. (1 bod)

(c) Minimizirajte funkciju. (4 boda)

2. Neka je $S = \{1, 2, 3, 6, 12\}$. Na S je zadana relacija R sa

$$R = \{(x, y) \mid y \text{ je višekratnik od } x\}$$

(a) Ispišite elemente relacije R. Prikažite relaciju R pomoću vrhova i lukova. (3 boda)

(b) Ispitajte koja od svojstava: refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost i tranzitivnost ispunjava relacija R. (5 bodova)

(c) Da li je relacija R relacija parcijalnog uređaja? Da li je R relacija ekvivalencije? Objasnite odgovore. (2 boda)

3. Zadani su skupovi

$$A = \{x \in \mathbb{Z} : |x-3| < 2\} \quad \text{i} \quad B = \{x \in \mathbb{N} : -1 \le x \le 3\}.$$

(a) Odredite elemente skupova A i B. (2 boda)

(b) Odredite elemente skupova $A \setminus B$, $B \setminus A$, $B \times A$ i $\mathcal{P}(A)$, gdje $\mathcal{P}(X)$ označuje partitivni skup od X. (4 boda)

(c) Zadan je predikat $P(x, y) =$ "$x^2 - y \ge 0$". Ako je $\mathcal{U} = \{-1, 1, 3, 5\}$, odredite istinitost sudova: $\forall x \exists y \neg P(x)$ i $\exists x \forall y P(x)$. (4 boda)

II. grupa **Linearna algebra**

4. Zadane su matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ i } C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

   (a) Odredite matrice $2A - B$, CB i BC. (3 boda)

   (b) Ako je $f(x) = x^2 + x - 2$, odredite $f(A)$. (3 boda)

   (c) Riješite matričnu jednadžbu

$$(2I - 2A^{-1}X)B = A^{-1}(B^2 - XB) \quad \text{(4 boda)}$$

5. Dan je sustav

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 0 \\ -x - 2y + 2z &= -6 \\ x + 2y - z &= 5 \end{aligned}$$

   (a) Riješite sustav pomoću inverzne matrice. (5 bodova)

   (b) Riješite sustav upotrebom Cramerovog pravila. (5 bodova)

6. Dan je sustav

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 3x_2 - x_3 + 5x_4 &= 6 \\ 2x_1 - 2x_2 + 6x_4 &= 8 \\ 3x_1 + 8x_3 + 5x_4 &= 18 \end{aligned}$$

   (a) Odredite opće rješenje zadanog sustava Gaussovim postupkom tako da nepoznanica x_2 bude parametar. (6 bodova)

   (b) Kolika je vrijednost determinante matrice sustava D? Objasnite. (4 boda)

1. (a) Semantička tablica:

x	y	z	$\overline{z} \Rightarrow y$	$\overline{x} \vee \overline{z}$	$y \wedge (\overline{x} \vee \overline{z})$	F	baz. disj.	baz.konj.
1	1	1	1	0	0	0	$\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}$	
1	1	0	1	1	1	1		$x \wedge y \wedge \overline{z}$
1	0	1	1	0	0	0	$\overline{x} \vee y \vee \overline{z}$	
1	0	0	0	1	0	1		$x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}$
0	1	1	1	1	1	1		$\overline{x} \wedge y \wedge z$
0	1	0	1	1	1	1		$\overline{x} \wedge y \wedge \overline{z}$
0	0	1	1	1	0	0	$x \vee y \vee \overline{z}$	
0	0	0	0	1	0	1		$\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}$

(b) $KNF = (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}) \wedge (\overline{x} \vee y \vee \overline{z}) \wedge (x \vee y \vee \overline{z})$
$DNF = (x \wedge y \wedge \overline{z}) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}) \vee (\overline{x} \wedge y \wedge z) \vee (\overline{x} \wedge y \wedge \overline{z}) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge \overline{z})$

(c) $F_{min} = \overline{z} \vee (\overline{x} \wedge y)$

2. (a) $R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,6),(1,12),(2,2),(2,6),(2,12),(3,3),(3,6),(3,12),$ $(6,6),(6,12),(12,12)\}$

(b) refleksivnost: Da, $(x,x) \in R$ jer x je višekratnik od x.
simetričnost: Ne, $(1,3) \in R$ ali $(3,1) \in R^c$.
antisimetričnost: Da, ako je x višekratnik od y i y od x, tada je $x = y$ (ili $x = -y$).
tranzitivnost: Da, ako je y višekratnik od x i z višekratnik od y tada je i z višekratnik od x.

(c) R je relacija parcijalnog uređaja jer je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna. Nije relacija ekvivalencije jer nije simetrična.

3. (a) $A = \{2,3,4\} \qquad B = \{1,2,3\}$

(b) $A \setminus B = \{4\} \qquad B \setminus A = \{1\}$
$B \times A = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4)\}$
$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, A\}$

(c) $\forall x \exists y \neg P(x,y)$ je lažni sud jer za $x = 3$, $P(3,y)$ je uvijek istinit.
$\exists x \forall y P(x,y)$ je istinit, $x = 3$ ili $x = 5$.

4. (a) $2A - B = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \qquad CB = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}, \qquad BC = -$

(b) $f(A) = A^2 + A - 2I = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $X = 2A - B$

5. (a) $A^{-1} = \dfrac{1}{-7}\begin{bmatrix} -2 & -1 & -4 \\ 1 & -3 & -5 \\ 0 & -7 & -7 \end{bmatrix}$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{-7}\begin{bmatrix} -2 & -1 & -4 \\ 1 & -3 & -5 \\ 0 & -7 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(b) $D = -7$, $D_1 = -14$, $D_2 = -7$, $D_3 = 7$. Rješenje je $(2,1,-1)$.

6. (a) $\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{13}{4}p, p, \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{4}p, \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{4}p\right)$

(b) Determinanta $D = 0$, jer je sustav neodređen.