Matematika

PITUP Križevci

08.07.2014.

– pismeni ispit –

popunjava profesor:

ZADATAK	1.	2.	3.	4.	5.	6.	UKUPNO	OCJENA
BROJ BODOVA								

Uputa. U svakoj grupi zadataka treba za prolaznu ocjenu imati barem 10 bodova i ukupni broj bodova mora biti veći od 30.

I. grupa **Matematička logika, skupovi, relacije, funkcije**

1. Zadana je funkcija algebre sudova

$$F(x,y,z) = ((\overline{y} \wedge \overline{z}) \Rightarrow (x \wedge z)) \Leftrightarrow (y \wedge (\overline{x} \vee \overline{z})).$$

   (a) Izradite semantičku tablicu. (5 bodova)

   (b) Minimizirajte normalnu formu funkcije. (4 boda)

   (c) Nacrtajte logički element. (1 bod)

2. Neka je $S = \{-2, 0, 2, 4\}$. Na S je zadana relacija R sa

$$R = \{(x,y) \mid x \cdot y \geq 0\}$$

   (a) Ispišite matricu incidencije relacije R. Prikažite relaciju R pomoću vrhova i lukova. (3 boda)

   (b) Ispitajte koja od svojstava: refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost i tranzitivnost ispunjava relacija R. (5 bodova)

   (c) Da li je relacija R relacija parcijalnog uređaja? Da li je R relacija ekvivalencije? Objasnite odgovore. (2 boda)

3. Zadani su skupovi $A = \{x \in \mathbb{N} : |x| < 4\}$ i $B = \{x \in \mathbb{Z} : -1 \leq x < 3\}$.

   (a) Odredite elemente skupova A i B. (2 boda)

   (b) Odredite $D = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. (3 boda)

   (c) Zadan je predikat $P(x) =$ ”$2x^2 - 3 > 0$”. Ako je $\mathcal{U} = \{-1, 1, 3, 5\}$, odredite istinitost sljedećih sudova:

      i. $\forall x P(x)$, (1 bod)

      ii. $\exists x P(x)$, (1 bod)

      iii. $\exists! x P(x)$, (1 bod)

      iv. $\forall x \neg P(x)$, (1 bod)

      v. $\exists! x \neg P(x)$, (1 bod)

II. grupa **Linearna algebra**

4. Dan je sustav

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 0 \\ -x - 2y + 2z &= -6 \\ x + 2y - z &= 5 \end{aligned}$$

(a) Riješite sustav pomoću inverzne matrice. (5 bodova)

(b) Riješite sustav upotrebom Cramerovog pravila. (5 bodova)

5. Zadana je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Odredite $\det A$. (6 bodova)

(b) Izračunajte vrijednost izraza

$$\det\left(3A^{-1}\right) \cdot \frac{1}{9} \det\left(A^T \cdot A\right)^T. \quad \text{(4 boda)}$$

6. Dan je sustav

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 3x_2 - x_3 + 5x_4 &= 6 \\ 2x_1 - 2x_2 + 6x_4 &= 8 \\ 3x_1 + 8x_3 + 5x_4 &= 18 \end{aligned}$$

(a) Odredite opće rješenje sustava Gaussovim postupkom tako da nepoznanica x_2 bude parametar. (8 bodova)

(b) Odredite 2 bazična rješenja. (2 boda)

1. (a) Semantička tablica:

x	y	z	$\overline{y} \wedge \overline{z}$	$x \wedge z$	$(\overline{y} \wedge \overline{z}) \Rightarrow (x \wedge z)$	$\overline{x} \vee \overline{z}$	$y \wedge (\overline{x} \vee \overline{z})$	F	baz. disj.
1	1	1	0	1	1	0	0	0	$\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}$
1	1	0	0	0	1	1	1	1	
1	0	1	0	1	1	0	0	0	$\overline{x} \vee y \vee \overline{z}$
1	0	0	1	0	0	1	0	1	
0	1	1	0	0	1	1	1	1	
0	1	0	0	0	1	1	1	1	
0	0	1	0	0	1	1	0	0	$x \vee y \vee \overline{z}$
0	0	0	1	0	0	1	0	1	

(b) KNF=$(\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}) \wedge (\overline{x} \vee y \vee \overline{z}) \wedge (x \vee y \vee \overline{z})$
$F_{min} = \overline{z} \vee (\overline{x} \wedge y)$

(c) logički element

2. (a) Matrica incidencije: Graf:

	-2	0	2	4
-2	1	1	0	0
0	1	1	1	1
2	0	1	1	1
4	0	1	1	1

(b) refleksivnost: Da, $(x, x) \in R$ jer $x \cdot x = x^2 \geq 0$
simetričnost: Da, $(x, y) \in R \Rightarrow x \cdot y \geq 0 \Rightarrow y \cdot x \geq 0 \Rightarrow (y, x) \in R$
antisimetričnost: Ne, $((0, 2) \in R) \wedge ((2, 0) \in R)$ ali $0 \neq 2$.
tranzitivnost: Ne, $(-2, 0) \in R \wedge (0, 2) \in R$ ali $(-2, 2) \notin R$

(c) Niti jedno niti drugo jer nije tranzitivna.

3. (a) $A = \{1, 2, 3\}$ $\quad B = \{-1, 0, 1, 2\}$

(b) $A \setminus B = \{3\}$ $\quad B \setminus A = \{-1, 0\}$ $\quad D = \{-1, 0, 3\}$

(c) i. $\forall x P(x)$: $\perp$, npr. za $x = 1$
ii. $\exists x P(x)$: $\top$, npr. za $x = 3$
iii. $\exists! x P(x)$: $\perp$, postoje dva, $x = 3$ i $x = 5$
iv. $\forall x \neg P(x)$: $\perp$, npr. za $x = 3$
v. $\exists! x \neg P(x)$: $\perp$, postoje dva, $x = -1$ i $x = 1$

4. (a) $A^{-1} = \dfrac{1}{-7} \begin{bmatrix} -2 & -1 & -4 \\ 1 & -3 & -5 \\ 0 & -7 & -7 \end{bmatrix}$

$X = A^{-1}B = \frac{1}{-7} \begin{bmatrix} -2 & -1 & -4 \\ 1 & -3 & -5 \\ 0 & -7 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

(b) $D = -7$, $D_1 = -14$, $D_2 = -7$, $D_3 = 7$. Rješenje je $(2, 1, -1)$.

5. (a) $\det A = 10$

(b) $\det\left(3A^{-1}\right) \cdot \dfrac{1}{9} \det\left(A^T A\right)^T = 3^4 \cdot \dfrac{1}{\det A} \cdot \dfrac{1}{9} \cdot \det A \cdot \det A = 9 \cdot \det A = 90$

6. (a) $\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{13}{4}p, p, \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{4}p, \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{4}p\right)$

(b) Bazična rješenja su: $(0, \dfrac{2}{13}, \dfrac{18}{13}, \dfrac{18}{13})$ $\quad (-\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2})$ $\quad (6, 2, 0, 0)$