Matematika

PITUP

30.8.2012.

pismeni ispit

IME I PREZIME: ____________________________

popunjava profesor:

ZADATAK	1.	2.	3.	4.	5.	6.	UKUPNO	OCJENA
BROJ BODOVA								

Uputa. U svakoj grupi zadataka treba za prolaznu ocjenu imati barem 10 bodova i ukupni broj bodova mora biti veći od 30.

I. grupa **Diskretna matematika**

1. Za zadanu funkciju algebre sudova

$$F(x,y,z) = ((\overline{x} \wedge \overline{y}) \Rightarrow z) \Leftrightarrow ((y \Leftrightarrow \overline{z}) \wedge (\overline{z} \Rightarrow \overline{x})).$$

odredite:

(a) semantičku tablicu, (5 bodova)
Rješenje:

x	y	z	$\overline{x} \wedge \overline{y}$	$\Rightarrow z$	$y \Leftrightarrow \overline{z}$	$\overline{z} \Rightarrow \overline{x}$	$\wedge$	F	baz. konj.
1	1	1	0	1	0	1	0	0	
1	1	0	0	1	1	0	0	0	
1	0	1	0	1	1	1	1	1	$x \wedge \overline{y} \wedge z$
1	0	0	0	1	0	0	0	0	
0	1	1	0	1	0	1	0	0	
0	1	0	0	1	1	1	1	1	$\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}$
0	0	1	1	1	1	1	1	1	$\bar{x} \wedge \overline{y} \wedge z$
0	0	0	1	0	0	1	0	1	$\bar{x} \wedge \overline{y} \wedge \bar{z}$

(b) minimizirajte funkciju, (3 boda)
Rješenje:
$DNF = (x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z})$
$F_{min} = (\bar{y} \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge \bar{z})$

(c) nacrtajte logički element. (2 boda)

2. Zadani su skupovi $A = \{x \in \mathbb{Z} : (x^2-1)(x-5) = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} : |x-2| < 3\}$ te $C = \{-1, 0, 1, 2\}$.

(a) Odredite elemente skupova A i B. (2 boda)
Rješenje:
$A = \{-1, 1, 5\}$ $\qquad B = \{1, 2, 3, 4\}$

(b) Ispišite elemente skupova $D = (A \cap B) \cup (B \setminus C)$ i $\mathcal{P}(A)$, gdje $\mathcal{P}(A)$ označava partitivni skup skupa A. (4 boda)
Rješenje:
$D = \{1\} \cup \{3, 4\} = \{1, 3, 4\}$
$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{-1\}, \{1\}, \{5\}, \{-1, 1\}, \{-1, 5\}, \{1, 5\}, A\}$

(c) Zadan je predikat $P(x,y) =$ "$x^2 \leq y^2$". Ako je $\mathcal{U} = C$ univerzum razmatranja, ispišite tablicu predikata (1 bod) te odredite istinitost tvrdnji (odgovore obrazložite):

i. $\forall x \exists y P(x,y)$, (1 bod)

ii. $\exists y \forall x P(x,y)$, (1 bod)

iii. $\forall y \exists x \neg P(x,y)$, (1 bod)

Rješenje:

$x \setminus y$	-1	0	1	2
-1	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	1	0	1	1
2	0	0	0	1

i. istina, za svaki x postoji takav y. To je npr. $y = x$ ili $y = 2$.

ii. istina, za $y = 2$ je predikat $P(x,2)$ istinit.

iii. laž, za $y = 2$ ne postoji x za koji bi $P(x,2)$ bio lažan.

3. Neka je $S = \{2,3,4,5,6\}$. Na S je zadana relacija R sa

$$R = \{(x,y) \mid (x \geq y) \wedge (x \text{ je prost broj})\}$$

(a) Ispišite matricu incidencije relacije R. Prikažite relaciju R pomoću vrhova i lukova. (3 boda)

$x \setminus y$	2	3	4	5	6
2	1	0	0	0	0
3	1	1	0	0	0
4	0	0	0	0	0
5	1	1	1	1	0
6	0	0	0	0	0

(b) Ispitajte koja od svojstava: refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost i tranzitivnost ispunjava relacija R. (5 bodova)
Rješenje:
refleksivnost: ne, za $x = 4$ par $(4,4)$ ne pripada relaciji R
simetričnost: ne, par $(3,2)$ pripada relaciji ali par $(2,3)$ ne.
antisimetričnost: da, ako $(x,y) \in R$ i $x \neq y$ tada $x \geq y$ i $x \neq y$ pa ne može vrijediti da je $y \geq x$ tj, par (y,x) ne može biti element relacije.
tranzitivnost: da, $(x,y) \in R$ i $(y,z) \in R$ slijedi da je $x \geq y$ i x prost i $y \geq z$ i y prost iz čega slijedi da je $x \geq z$ i x prost. Dakle $(x,z) \in R$.

(c) Da li je relacija R relacija parcijalnog uređaja? Da li je R relacija ekvivalencije? Objasnite odgovore. (2 boda)
Rješenje:
Relacija ekvivalencije mora biti refleksivna, simetrična i tranzitivna.
Relacija parcijalnog uređaja mora biti refleksivna, antisimetrična i tranzitivna.
Relacija R nije nijedno, jer nije refleksivna.

II. grupa **Linearna algebra**

4. Zadana je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{i} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

(a) Odredite $f(A)$ ako je $f(x) = x^3 - x + 2$. (5 bodova)
Rješenje:

$$f(A) = A^3 - A + 2I = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 & 23 \\ 92 & 59 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 & 22 \\ 88 & 58 \end{bmatrix}$$

(b) Riješite matričnu jednadžbu

$$AXA - 2BA = 2AXA + A^2. \qquad \text{(5 bodova)}$$

Rješenje:

$X = -2A^{-1}B + I = -2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

5. Zadan je sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} 2x - 2y + 3z &= -1 \\ x + y + z &= 2 \\ -2x + 2y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

(a) Riješite sustav jednadžbi Cramerovim pravilom. (6 bodova)
Rješenje:
$D = 4 \quad D_1 = 8 \quad D_2 = 4 \quad D_3 = -4$
Rješenje sustava je uređena trojka $(2, 1, -1)$.

(b) Izračunajte $\det\left((4A^3)^T\right)$. (4 boda)
Rješenje:
$\det\left((4A^3)^T\right) = \det(4A^3) = 4^3 \cdot \det(A^3) = 4^3 \cdot (\det A)^3 = 4^3 \cdot 4^3 = 4096$

6. Zadan je sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} x + y + 2z + 3t &= 6 \\ x - 3y + 2z - 3t &= -4 \\ 6y + 2z + 5t &= 12 \\ x + 3y + 4z + 2t &= 8 \end{aligned}$$

(a) Odredite opće rješenje sustava tako da nepoznanica z bude parametar. (7 bodova)
Rješenje:
Opće rješenje sustava je dano sa $\left(\frac{19}{8} - \frac{11}{4}p, \frac{11}{8} - \frac{3}{4}p, p, \frac{3}{4} + \frac{1}{2}p\right), \ p \in \mathbb{R}$.

(b) Odredite tri bazična rješenja. (3 boda)
Rješenje:
$(0, \frac{47}{44}, \frac{9}{22}, \frac{21}{22})$, $(-\frac{8}{3}, 0, \frac{11}{6}, \frac{5}{3})$, $(\frac{19}{8}, \frac{11}{8}, 0, \frac{3}{4})$, $(\frac{13}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, 0)$.