Matematika PITUP

Križevci - 18.02.2015.

– pismeni ispit –

IME I PREZIME: ________________________________

popunjava profesor:

ZADATAK	1.	2.	3.	4.	5.	6.	UKUPNO	OCJENA
BROJ BODOVA								

Uputa. U svakoj grupi zadataka treba za prolaznu ocjenu imati barem 10 bodova i ukupni broj bodova mora biti veći od 30.

I. grupa **Matematička logika, skupovi, relacije, funkcije**

1. Zadana je funkcije algebre sudova

$$F\left(x,y,z\right)=\left(x\Rightarrow z\right)\wedge\left(\left(\overline{y}\wedge\overline{x}\right)\vee z\right).$$

   (a) Izradite semantičku tablicu za funkciju F. (5 bodova)

   (b) Napišite obje normalne forme za funkciju F. (1 bod)

   (c) Minimizirajte funkciju. (4 boda)

2. Zadani su skupovi $A=\{a\in\mathbb{N}:|a+1|\leq 3\}$, $B=\{0,1,2,3\}$ i $C=\{b\in\mathbb{Z}:b\in\langle -2,2\rangle\}$.

   (a) Ispišite elemente skupova A i C. (2 boda)

   (b) Odredite skup $D=(A\cup C)\setminus(B\cap C)$, te njegov partitivni skup $\mathcal{P}(D)$. (3 boda)

   (c) Na skupu $\mathcal{U}=B$ zadan je predikat

$$P(x,y)=\text{"}x^2\leq y+1\text{"}.$$

   Objasnite istinitost suda $\exists!x\forall yP(x,y)$.
   Negirajte sud $\forall x\exists yP(x,y)$, pa odredite njegovu istinitost.
   (5 bodova)

3. Na skupu $X=\{1,2,3,4\}$ zadana je relacija R grafom:

(a) Ispišite matricu incidencije i elemente relacije R. (3 boda)

(b) Ispitajte koja od navedenih svojstava: tranzitivnost, simetričnost te antisimetričnost ispunjava relacija R. (4 boda)

(c) Objasnite, je li relacija R relacija parcijalnog uređaja? (1 bod)

(d) Prikažite grafom obrat relacije $\overline{R}$. (2 boda)

II. grupa **Linearna algebra**

4. Zadane su matrice

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Odredite B^{-1}. (4 boda)

(b) Za zadane matrice A i B riješite matričnu jednadžbu:

$$A - ABX = A(2BX + A). \qquad \text{(6 bodova)}$$

5. Zadan je sustav

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 4x_4 &= 5 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= -2 \\ 3x_2 + x_3 - 2x_4 &= 4 \\ x_1 - 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

(a) Odredite vrijednost $\det A$, gdje je A matrica sustava. (5 bodova)

(b) Izračunajte $r(A)$, rang matrice A . (2 boda)

(c) Primjenom Kronecker-Capellijevog teorema odredite ima li zadani sustav rješenja. (3 boda)

6. Zadan je sustav

$$\begin{aligned} -5x - y + 5z - 8t &= 4 \\ x + 2y + 8z + 4t &= -8 \\ -4x - y + 3z - 6t &= 2 \\ -3x + y + 11z - 2t &= -6 \end{aligned}$$

Gaussovim postupkom riješite sustav tako da nepoznanica z bude parametar. (10 bodova)

Rješenje:

1. (a) Semantička tablica:

x	y	z	$x \Rightarrow z$	$\overline{y} \wedge \overline{x}$	$(\overline{y} \wedge \overline{x}) \vee z$	F
1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1

   (b) $DNF = (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge z) \vee (\overline{x} \wedge y \wedge z) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge \overline{z})$
   $KNF = (\overline{x} \vee \overline{y} \vee z) \wedge (\overline{x} \vee y \vee z) \wedge (x \vee \overline{y} \vee z)$

   (c) $F_{min} = z \vee (\overline{x} \wedge \overline{y})$

2. (a) $A = \{1, 2\}$ $\qquad$ $C = \{-1, 0, 1\}$

   (b) $D = \{-1, 0, 1, 2\} \setminus \{0, 1\} = \{-1, 2\}$
   $\mathcal{P}(D) = \{\emptyset, \{-1\}, \{2\}, D\}$

   (c) Netočno, postoje dva takva; $x = 0$ i $x = 1$
   Negacija: $\exists x \forall y \neg P(x, y)$ - točno, to je npr. $x = 3$.

3. (a) $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$

	1	2	3	4
1	1	1	1	0
2	0	1	0	1
3	0	0	1	0
4	0	0	1	1

   (b) tranzitivnost: Ne, protuprimjer su brojevi $x = 1, y = 2, z = 3$
   antisimetričnost: Da, lukovi su jednostruki
   simetričnost: Ne, protuprimjer su brojevi $x = 1, y = 2$

   (c) Relacija R nije relacija parcijalnog uređaja jer nije tranzitivna.

   (d) Graf obrata relacije ima strelice u drugu stranu.

4. (a) $B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & 7 & -3 \\ -12 & -15 & 7 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

   (b) $X = \frac{1}{3}B^{-1}(I - A) = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6 & 7 & -3 \\ -12 & -15 & 7 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$
   $= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 32 & -2 & -16 \\ -70 & 4 & 34 \\ -12 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

5. (a) $\det A = -18$

   (b) $r(A) = 4$ jer je $\det A \neq 0$.

   (c) $r(A_p) = 4$ iz istog razloga pa je po Kronecker Capellijevom teoremu sustav rješiv, točnije određen.

6. (a) Opće rješenje sustava je: $(4 + 2p, -5p, p, -3), p \in \mathbb{R}$