

Odlučivanje u uvjetima nesigurnosti

S obzirom u kojoj su nam mjeri poznate moguće posljedice odluka koje donosimo metode za odlučivanje dijelimo u dvije skupine:

- metode odlučivanja u uvjetima sigurnosti,
- metode odlučivanja u uvjetima nesigurnosti i rizika.

Kod odlučivanja u uvjetima *nesigurnosti* poznate se nam aktivnosti koje možemo poduzeti i moguće posljedice (više njih) tih odluka, ali nam nisu poznate vjerojatnosti nastupanja pojedinih posljedica.

Kod odlučivanja u uvjetima *rizika* poznate su nam aktivnosti koje možemo poduzeti i posljedice tih aktivnosti s pripadnim vjerojatnostima.

Informacije koje su nam dostupne možemo zapisati u obliku *matrice plaćanja*. Svaki stupac predstavlja jedno od stanja okoline koje može nastati S_j . Svaki redak predstavlja moguće ishode ukoliko je poznat akcija A_i . v_{ij} predstavlja financijski rezultat kao posljedicu poduzimanja poduhvata A_i i nastanka stanja okoline S_j .

Akcija	Stanja okoline			
	S_1	S_2	...	S_n
A_1	v_{11}	v_{12}		v_{1n}
A_2	v_{21}	v_{22}		v_{2n}
A_m	v_{m1}	v_{m2}		v_{mn}

Metode odlučivanja u uvjetima nesigurnosti:

- Maximax (optimistični pristup)
- Maximin (pesimistični pristup, Waldov kriterij)
- Kriterij realizma (Hurwiczov kriterij)
- Kriterij minimalnog žaljenja (Savageov kriterij)
- Laplaceov kriterij (pristup jednake vjerojatnosti)

Osnovna metoda odlučivanja u uvjetima rizika:

- Očekivana vrijednost

Metode odlučivanja u uvjetima nesigurnosti i rizika prikazat ćemo kroz primjer.

Primjer. Poduzeće razmatra otvaranje novog pogona. U tablici plaćanja prikazani su financijski rezultati (dobit u tisućama kuna) koji mogu nastati u ovisnosti o akciji koje poduzeće odabere poduzeti i stanju ekonomije koje može nastati u budućnosti (poduzeće ne može utjecati na stanje ekonomije).

Akcija	Stanje okoline		
	Ekspanzija	Stagnacija	Recesija
Gradnja velike tvornice	200	50	-120
Gradnja srednje tvornice	90	120	-30
Gradnja male tvornice	40	30	20
Odustajanje od gradnje	0	0	0

Maximax kriterij

Karakterizira je sklonost riziku pri odlučivanju.

Za svaku akciju A_i identificira se najbolji ishod v_i^* i bira se akcija a^* za koju je ta vrijednost najveća v^* .

$$v_i^* = \max_j v_{ij}$$

$$v^* = \max_i v_i^* = \max_i \max_j v_{ij}$$

$$a^* = \operatorname{argmax}_i v_i^*$$

U našem primjeru $v^* = 200$, $a^* =$ 'Gradnja velike tvornice'.

Akcija	Stanje okoline			Max
	Ekspanzija	Stagnacija	Recesija	
Gradnja velike tvornice	200	50	-120	200
Gradnja srednje tvornice	90	120	-30	120
Gradnja male tvornice	40	30	20	40
Odustajanje od gradnje	0	0	0	0

Maximin kriterij

Ovaj kriterij karakterizira odbojnost prema riziku u odlučivanju. Za svaku akciju A_i identificira se najslabiji ishod v_{i*} i bira se akcija a_* za koju je ta vrijednost najveća v_* .

$$v_{i*} = \min_j v_{ij}$$

$$v_* = \max_i v_{i*} = \max_i \min_j v_{ij}$$

$$a_* = \operatorname{argmax}_i v_{i*}$$

U našem primjeru $v_* = 20$, $a_* =$ 'Gradnja male tvornice'.

Akcija	Stanje okoline			Min
	Ekspanzija	Stagnacija	Recesija	
Gradnja velike tvornice	200	50	-120	-120
Gradnja srednje tvornice	90	120	-30	-30
Gradnja male tvornice	40	30	20	20
Odustajanje od gradnje	0	0	0	0

Kriterij realizma

Ravnotežni je kriterij između prethodna dva kriterija. Odredi se faktor realizma (optimizma) α ili faktor pesimizma (koji iznosi $1 - \alpha$) koji karakterizira stav donositelja odluke prema riziku.

Za svaku akciju odredi se Hurwiczova vrijednost

$$H_i = \alpha v_i^* + (1 - \alpha)v_{i*}$$

Odabire se ona akcija a_H za koju je H_i najveći.

$$v_H = \max_i H_i$$

$$a_H = \operatorname{argmax}_i H_i$$

U našem primjeru, za $\alpha = 0,4$, $v_H = 30$, $a_H = \text{'Gradnja srednje tvornice'}$.

Akcija	Stanje okoline			H_i
	Ekspanzija	Stagnacija	Recesija	
Gradnja velike tvornice	200	50	-120	8
Gradnja srednje tvornice	90	120	-30	30
Gradnja male tvornice	40	30	20	28
Odustajanje od gradnje	0	0	0	0

Kriterij minimalnog žaljenja

Svakom ishodu u tablici odlučivanja pridružuje se žaljenje

$$r_{ij} = \max_i v_{ij} - v_{ij}$$

Od ishoda najbolje akcije za stanje okoline S_j oduzima se vrijednost v_{ij} i formira se nova tablica koju nazivamo *tablica žaljenja*.

Za naš primjer tablica žaljenja ima vrijednosti:

Akcija	Stanje okoline		
	Ekspanzija	Stagnacija	Recesija
Gradnja velike tvornice	0	70	140
Gradnja srednje tvornice	110	0	50
Gradnja male tvornice	160	90	0
Odustajanje od gradnje	200	120	20

Za svaku akciju a_i računa se maksimalno žaljenje.

$$\rho_i = \max_j r_{ij}$$

Bira se akcija a_R za koju je izračunata vrijednost najmanja.

$$\min_i \rho_i = \min_i \max_j r_{ij}.$$

U našem primjeru minimalna vrijednost je 110, a a_R ='Gradnja srednje tvornice'.

Akcija	Stanje okoline			Max
	Ekspanzija	Stagnacija	Recesija	
Gradnja velike tvornice	0	70	140	140
Gradnja srednje tvornice	110	0	50	110
Gradnja male tvornice	160	90	0	160
Odustajanje od gradnje	200	120	20	200

Očekivana vrijednost

Ako se od ostvarenja nekog događaja čija je vjerojatnost ostvarenja p ostvaruje dobit D , a inače nema ni gubitka ni dobitka, *matematičko očekivanje* (očekivana vrijednost, očekivana monetarna vrijednost) definira se kao produkt tih dviju vrijednosti

$$E = p \cdot D$$

Poopćenje:

Neka se nakon pokretanja projekta može ostvariti jedan od n različitih događaja s pripadnim vjerojatnostima p_i , $i = 1, \dots, n$ i pripadnim dobitima D_i . Matematičko očekivanje definira se kao suma produkata vjerojatnosti i dobiti događaja.

$$E = \sum_{i=1}^n p_i \cdot D_i$$

Laplaceov kriterij

Pošto vjerojatnosti potencijalnih ishoda nisu poznate pretpostavlja se da su vjerojatnosti jednake.

$$p(s_i) = \frac{1}{n}$$

Za svaku akciju a_i računa se očekivana vrijednost

$$e_i = E(a_i) = \sum_{j=1}^n p(s_j) \cdot v_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n v_{ij}$$

Odabere se akcija a_E za koju se ostvaruje na najveća očekivana vrijednost.

U našem primjeru najveća očekivana vrijednost iznosi 60, a ostvaruje se za a_E = 'Gradnja srednje tvornice'.

Akcija	Stanje okoline			E_i
	Ekspanzija	Stagnacija	Recesija	
Gradnja velike tvornice	200	150	-120	43.3
Gradnja srednje tvornice	90	120	-30	60
Gradnja male tvornice	40	30	20	30
Odustajanje od gradnje	0	0	0	0

Kriterij očekivane vrijednosti

Za primjenu kriterija očekivane vrijednosti potrebno je poznavanje vjerojatnosti nastanka pojedinih stanja okoline $p(s_i)$. Određivanje najbolje alternative dobije se na isti način kao i primjenom Laplaceovog kriterija uz uvažavanje poznatih vjerojatnosti (umjesto vjerojatnosti $p(s_i) = 1/n$).

Ukoliko pretpostavimo da su vjerojatnosti nastanka stanja (Ekspanzija, Stagnacija, Recesija) iznose (0.1, 0.5, 0.4) na temelju kriterija očekivane vrijednosti odabrali bi alternativu 'Izgradnja srednje tvornice'. Očekivana vrijednost iznosi 57.

Akcija	Stanje okoline			E_i
	Ekspanzija	Stagnacija	Recesija	
Gradnja velike tvornice	200	150	-120	-3
Gradnja srednje tvornice	90	120	-30	57
Gradnja male tvornice	40	30	20	27
Odustajanje od gradnje	0	0	0	0

Trošak nesigurnosti

Trošak nesigurnosti ili očekivana vrijednost savršene informacije (OVSI) jednaka je razlici očekivane vrijednosti uslijed sigurnosti (OVUS) i očekivane vrijednosti bez informacija (OVBI).

$$OVSI = OVUS - OVBI$$

Očekivana vrijednost uslijed sigurnosti (OVUS) predstavlja poznavanje stanja okoline u budućnosti (relativna frekvencija pojavljivanja pojedinih stanja se ne mijenja).

Ukoliko bi stanje bilo poznato odabrali bi akciju koja bi u tom stanju dala maksimalnu dobit. Zaključujemo

$$OVUS = p(s_1) \cdot \max_i v_{i1} + p(s_2) \cdot \max_i v_{i2} + \dots + p(s_n) \cdot \max_i v_{in}$$

OVBI je očekivana vrijednost akcije odabrane na temelju kriterija očekivane vrijednosti.

U našem primjeru

$$OVUS = 0,1 \cdot 200 + 0,5 \cdot 100 + 0,4 \cdot 20 = 88,$$

$$OVSI = OVUS - OVBI = 88 - 57 = 31.$$

Granična analiza u poslovanju

U slučaju poslovnog problema u kojem okolina može poprimiti mnogo stanja izrada tablice isplate bila bi previše komplicirana pa se problemu pristupa na drugi način. Da bi riješili takav problem potrebno je uvesti dva nova pojma:

- **Granični trošak (GT)** - dodatni trošak koji nastaje pri proizvodnji jednog dodatnog proizvoda.
- **Granična dobit (GD)** – dodatna dobit koja nastaje prodajom jednog dodatnog proizvoda.

Promatrat ćemo dva slučaja granične analize:

- granična analiza s diskretnom distribucijom potražnje,
- granična analiza s normalnom distribucijom potražnje.

Proizvodnja dodatnog proizvoda je isplativa ako je očekivana dobit od dodatnog proizvoda veća od očekivanog troška proizvodnje dodatnog proizvoda. U ovoj analizi očekivani gubitak jednak je očekivanom trošku. Neka je

p - vjerojatnost da je potražnja veća ili jednaka ponudi
(dodatni proizvod će biti prodan)

$1-p$ - vjerojatnost da je potražnja manja od ponude
(dodatni proizvod neće biti prodan)

$p \cdot GD$ – očekivana dobit od dodatnog proizvoda

$(1 - p) \cdot GT$ - očekivani trošak proizvodnje dodatnog proizvoda

Uvjeti isplativosti proizvodnje:

$$\begin{aligned} p \cdot GD &\geq (1 - p)GT \\ p \cdot GD &\geq GT - p \cdot GT \\ p(GT + GD) &\geq GT \\ p &\geq \frac{GT}{GT + GD} \end{aligned}$$

Dakle, dodatni proizvod je isplativo proizvesti ukoliko je vjerojatnost prodaje veća od omjera graničnog troška i zbroja graničnog troška i granične dobiti.

Granična analiza s diskretnom distribucijom

Primjer. Ugostiteljski objekt naručuje krafne. Krafne je potrebno prodati isti dan jer naredni dan potpuno gube na vrijednosti. Ugostiteljski objekt plaća 40 kuna za jednu kutiju krafni, dok je prodaje po 60 kuna. Dakle, granična dobit po kutiji iznosi 20 kuna, a granični trošak je 40 kuna. Iz prošle prodaje ugostiteljski objekt procjenjuje distribuciju prodaje krafni.

n	Vjerojatnost prodaje ($p=n$)	Kumulativno ($p \geq n$)
4	0,05	1,00
5	0,15	0,95
6	0,15	0,80
7	0,20	0,65
8	0,25	0,54
9	0,10	0,20
10	0,10	0,10

$$p \geq \frac{GT}{GT + GD} = \frac{40}{40 + 20} = 0,66$$

Pošto su za $n=6$ kutija očekivani granični prihodi veći od očekivanih graničnih troškova (a za $n=7$ to više ne vrijedi) to je optimalna narudžba.

Granična analiza s normalnom distribucijom

Kada potražnja za proizvodom poprima normalnu distribuciju, što je česta pretpostavka u modeliranju poslovanja, granična analiza s normalnom distribucijom se može koristiti.

Za takvu analizu potrebno je odraditi četiri veličine:

- prosječnu prodaju proizvoda μ ,
- standardnu devijaciju prodaje proizvoda σ ,
- granična dobit od prodaje jednog proizvoda GD ,
- granični trošak od proizvodnje dodatnog proizvoda GT .

Koraci u provođenju analize:

(a) Odredite vjerojatnost p .

$$p = \frac{GT}{GT + GD}$$

(b) Odredite percentil z standardne normalne distribucije koji odgovara vrijednosti $1-p$, tj. odredite z t.d. $P(N(0,1) \leq z) = 1 - p$.

(c) Optimalna proizvodnja dobije se formulom

$$Z^* = z\sigma + \mu.$$

Primjer. Prodaja novina na kiosku poprima normalnu razdiobu s 50 prodanih novina i standardnom devijacijom 10 novina. Uz granični trošak od 4 kune i granični dobit od 2 kuna (prodaja po šest kuna), odredite koliko novina kiosk treba naručiti.

Rj.

$$p = \frac{GT}{GT + GD} = \frac{2}{3} \Rightarrow z = -0,407$$

Optimalna narudžba je: $x^* = 10 \cdot (-0,407) + 50 = 45,69 \Rightarrow 45$

Zadaci za vježbu

ZAD 1. Zadatak. Osoba razmišlja o prodaji ruža subotom navečer zaljubljenim parovima. Nabavna vrijednost ruže je 15 kuna, a prodajna 20 kn. Minimalno može naručiti 10 komada, a odlučila je da neće naručiti više od 20 komada. Za potražnju također očekuje da bi trebala biti barem 10, a najviše 20.

- (a) Provjerite koje preporuke daje pojedini kriterij odlučivanja u uvjetima nesigurnosti.
 (b) Ukoliko su poznate vjerojatnosti potražnje, odredite očekivanu vrijednost i trošak nesigurnosti.

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
5%	5%	5%	10%	15%	20%	15%	10%	5%	5%	5%

ZAD 2. Poduzeće razmišlja o osiguranju zgrade od požara. Vrijednost zgrade je 2 milijuna kuna, a osigurali bi je na vrijednost od milijun kuna na razdoblje od pet godina. Ukoliko je vjerojatnost požara u godini 1%, a vremenska vrijednost novca 4% odredite neto cijenu tog osiguranja. (Po isplati osigurane svote koja se isplaćuje na kraju godine osiguranje prestaje.)

Rješenje.

Godina	Vjerojatnost događaja	Vjerojatnost isplate	Isplata u slučaju nastanka događaja	Sadašnja vrijednost isplate	Očekivana sadašnja vrijednost isplate
1	0,01	0,01	1.000.000	$1.000.000 / 1,04^1$	$0,01 \cdot 1.000.000 / 1,04^1$
2	0,01	$0,99^1 \cdot 0,01$	1.000.000	$1.000.000 / 1,04^2$	$0,99^1 \cdot 0,01 \cdot 1.000.000 / 1,04^2$
3	0,01	$0,99^2 \cdot 0,01$	1.000.000	$1.000.000 / 1,04^3$	$0,99^2 \cdot 0,01 \cdot 1.000.000 / 1,04^3$
4	0,01	$0,99^3 \cdot 0,01$	1.000.000	$1.000.000 / 1,04^3$	$0,99^3 \cdot 0,01 \cdot 1.000.000 / 1,04^4$
5	0,01	$0,99^4 \cdot 0,01$	1.000.000	$1.000.000 / 1,04^4$	$0,99^4 \cdot 0,01 \cdot 1.000.000 / 1,04^5$
Neto premija (ukupna očekivana sadašnja vrijednost isplate)					43.671,10